Chapitre I - Les suites

Rémi Caneri

Table des matières

I. Raisonnement par récurrence

Théorème - Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.
On suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Pour tout entier naturel k fixé, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Alors pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$(\mathcal{P}(0) \text{ et } (\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1))) \implies \forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$$

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + n + 1$.
Démontrer que la propriété $\mathcal{P}(n)$: $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$ est vraie pour tout entier naturel n.

Réponse

- Initialisation : $\frac{0(0+1)}{2} = 0 = u_0 \geqslant 0$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $u_k = \frac{k(k+1)}{2}$. Démontrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $u_{k+1} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$.
  $u_{k+1} = \underbrace{u_k + k + 1 = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1}_{\text{hypothèse de récurrence}} = (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = (k+1)\frac{k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$
  Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ est vraie $\implies \mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Théorème - Raisonnement par récurrence à partir d'un certain rang

Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une propriété définie pour $n \geqslant n_0$.
On suppose que :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie.
- Pour tout entier naturel $k \geqslant n_0$ fixé, si $\mathcal{P}(k)$ est vraie alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Alors pour tout entier naturel $n \geqslant n_0$, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$(\mathcal{P}(n_0) \text{ et } (\forall k \in \mathbb{N} | k \geqslant n_0, \mathcal{P}(k) \implies \mathcal{P}(k+1))) \implies \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies \mathcal{P}(n)$$

Exemple

Démontrer que $\forall n \in [\![6, +\infty]\!], 6n + 7 \leqslant 2^n$

Réponse

Posons $\mathcal{P}(n) : 6n + 7 \leqslant 2^n$

- Initialisation : $6 \times 6 + 7 = 43$ et $2^6 = 64$ or $43 < 64$ donc $\mathcal{P}(6)$ est vraie.
- Hérédité : soit $k \in [\![6, +\infty]\!]$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $6k + 7 \leqslant 2^k$. Démontrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $6(k+1) + 7 \leqslant 2^{k+1}$.
  $2^{k+1} = \underbrace{2 \times 2^k \geqslant 2 \times (6k+7)}_{\text{hypothèse de récurrence}} = 12k + 14$
  Or $6(k+1) + 7 = 6k + 13 \leqslant 12k + 14$ car $k \in \mathbb{N}$. Donc $6(k+1) + 7 \leqslant 2^{k+1}$
  Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ est vraie $\implies \mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \in [\![6, +\infty]\!], \mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, $\forall n \in [\![6, +\infty]\!], 6n + 7 \leqslant 2^n$.

Propriété - Inégalité de Bernoulli

$$\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1 + na$$

Démonstration - à connaître

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$.
Posons $\mathcal{P}(n) : (1+a)^n \geqslant 1 + na$.

- Initialisation : $(1+a)^0 = 1$ et $1 + 0a = 1$ sonc $(1+a)^0 \geqslant 1 + 0a$ ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie, c'est-à-dire $(1+a)^k \geqslant 1 + ka$. Démontrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie, c'est-à-dire $(1+a)^{k+1} \geqslant 1 + (k+1)a$.
  $(1+a)^{k+1} = \underbrace{(1+a) \times (1+a)^k \geqslant (1+a)(1+ka)}_{\text{hypothèse de récurrence}} \geqslant 1 + a + ka + ka^2 \geqslant 1 + (k+1)a + ka^2 \geqslant 1 + (k+1)a$
  car k et a sont positifs.
  Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  Ainsi, $\forall k \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(k)$ est vraie $\implies \mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie, c'est-à-dire, $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1 + na$.

II. Limites d'une suite

1. Généralités

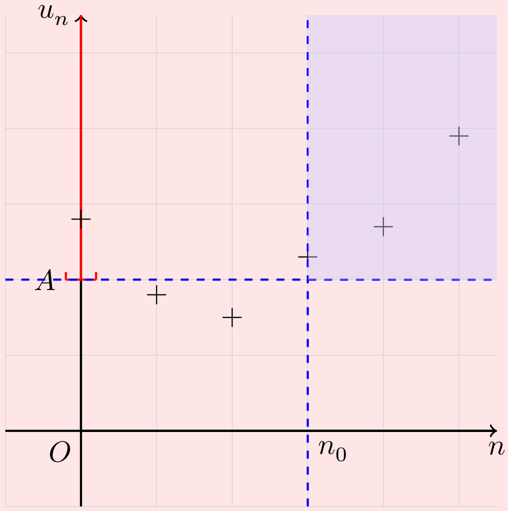
a. limite infinie

Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.
On dit que (u_n) tend vers $+\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $[A, +\infty[$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$. On dit que (u_n) diverge vers $+\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \in [A, +\infty[)$$

Interprétation géométrique



Pour tout nombre réel A, il existe un entier naturel n_0 tel que les points de coordonnées (n, u_n) avec $n \geqslant n_0$ sont tous dans la partie du plan bleue, c'est-à-dire situés au-dessus de la droite d'équation $y = A$.

Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$.
On dit que (u_n) tend vers $-\infty$ si et seulement si tout intervalle de la forme $]-\infty, A]$ avec $A \in \mathbb{R}$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$. On dit que (u_n) diverge vers $-\infty$.

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = -\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \in]-\infty, A])$$

Propriété

Soit $k \in \mathbb{R}$.

- Si $k > 0$ alors les suites (kn), (kn^2), $(k\sqrt{n})$ et (ke^n) divergent vers $+\infty$.
- Si $k < 0$ alors les suites (kn), (kn^2), $(k\sqrt{n})$ et (ke^n) divergent vers $-\infty$.

Démonstration - à connaître en partie

Intéressons-nous à la suite (kn).
Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit $A \in \mathbb{R}$.
Posons $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = kn$
Si $A \leqslant 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, kn \geqslant 0 \geqslant A$ auquel cas $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [A, +\infty[$.
En posans $n_0 = 0$, on a $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$

Supposons maintenant que $A > 0$.
$u_n \geqslant A \iff kn \geqslant A \iff n \geqslant \frac{A}{k}$
Posons $n_0 = \left\lceil \frac{A}{k} \right\rceil$ la partie entière supérieure de $\frac{A}{k}$, c'est-à-dire le plus petit entier supérieur ou égal à $\frac{A}{k}$.
Ainsi $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$

Donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \in [A, +\infty[$
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n \to +\infty} kn = +\infty$

De même pour les suites (kn^2) et $(k\sqrt{n})$.

Intéressons-nous maintenant à la suite (ke^n).*démonstration à connaître*
Posons $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = ke^n$
Si $A \leqslant 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, ke^n \geqslant 0 \geqslant A$ auquel cas $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \in [A, +\infty[$.
En posans $n_0 = 0$, on a $\forall n \geqslant n_0, v_n \geqslant A$

Supposons maintenant que $A > 0$.
$v_n \geqslant A \iff ke^n \geqslant A \iff e^n \geqslant \frac{A}{k} > 0$
On rappelle que $\forall y \in \mathbb{R}_+^*, \exists! x \in \mathbb{R}, e^x = y$
$\frac{A}{k} > 0 \implies \exists! x_0 \in \mathbb{R}, e^{x_0} = \frac{A}{k}$
Posons $n_0 = \lceil x_0 \rceil$ (partie entière supérieure). On a donc $n_0 \geqslant x_0$.
La fonction exponentielle étant strictement croissante, on a :
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies e^n \geqslant e^{n_0} \geqslant e^{x_0} = \frac{A}{k}$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies e^n \geqslant \frac{A}{k}$
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies ke^n \geqslant A$
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies v_n \in [A, +\infty[$

Donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies v_n \in [A, +\infty[$
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$ ou encore $\lim\limits_{n \to +\infty} ke^n = +\infty$

Exemple

La suite $3n^2$ diverge vers $+\infty$.
La suite $-\pi e^n$ diverge vers $-\infty$.

Théorème

Toute suite croissante et non majorée diverge vers $+\infty$.

Démonstration - à connaître

Soit (u_n) une suite croissante et non majorée.

(u_n) est non majorée donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, u_{n_0} \geqslant A$.
De plus (u_n) est croissante donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \geqslant u_{n_0} \geqslant A$
Ainsi $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Exemple

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 3n^2 + 2$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
2. Démontrer que la suite (u_n) est non majorée.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Réponse

1. $u_{n+1} - u_n = (3(n+1)^2 + 2) - (3n^2 + 2) = 3\left[(n+1)^2 - n^2\right] = 3(n+1-n)(n+1+n)$
   $u_{n+1} - u_n = 3 \times 1 \times (2n+1) = 6n + 3 > 0$ car $n \geqslant 0$
   donc la suite (u_n) est croissante.

2. Soit $A \in \mathbb{R}$.
   $u_n \geqslant A \iff 3n + 2 \geqslant A \iff 3n \geqslant A - 2 \iff n \geqslant \frac{A-2}{3}$
   Posons $n_0 = \left\lceil \frac{A-2}{3} \right\rceil$.
   $\forall n \geqslant n_0, u_n \geqslant A$.
   Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \geqslant A$
   Donc la suite (u_n) n'est pas majorée.

3. La suite (u_n) est croissante et non majorée donc diverge vers $+\infty$.
   $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

Remarque

Toute suite décroissante et non minorée diverge vers $-\infty$.

b. limite finie

Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ ou une partie de $\mathbb{N}$. Soit ℓ un nombre réel.
On dit que (u_n) tend vers ℓ si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes u_n à partir d'un certain rang. On note alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$. On dit que (u_n) converge vers ℓ.

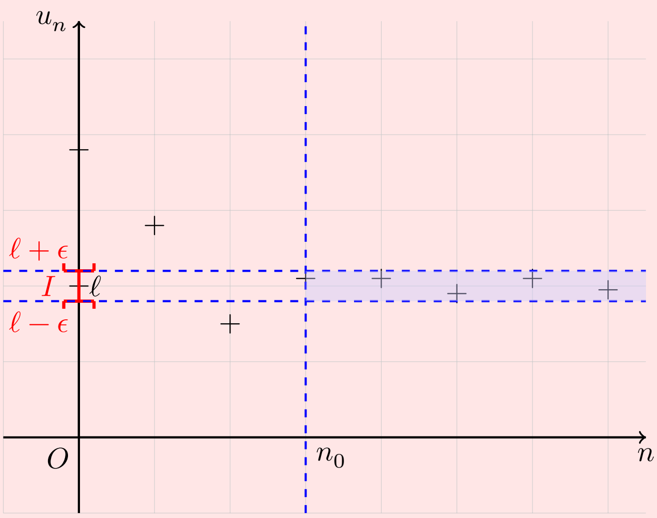
$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff (\forall I \text{ intervalle ouvert tel que } \ell \in I, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \in I)$$

Remarque

On peut aussi écrire :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell \iff (\forall \epsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| < \epsilon)$$

Interprétation géométrique



Pour tout intervalle ouvert I, il existe un entier naturel n_0 tel que les points de coordonnées (n, u_n) avec $n \geqslant n_0$ sont tous dans la partie du plan bleue, c'est-à-dire entre les droites d'équation $y = \ell - \epsilon$ et $y = \ell + \epsilon$.

Propriété

Soit $k \in \mathbb{R}$.
Les suites $\left(\frac{k}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{k}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(ke^{-n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Démonstration

Intéressons-nous à la suite $\left(\frac{k}{n}\right)$.
Soit $k \in \mathbb{R}$.
Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{k}{n}$.

Soit I un intervalle ouvert tel que $0 \in I$.
Soient a et b deux réels tels que $I =]a, b[$. On a donc $a < 0 < b$
$u_n \in I \iff a < \frac{k}{n} < b$

$$a < \frac{k}{n} < b \iff an < k < bn \iff \begin{cases} an < k \\ k < bn \end{cases} \iff \begin{cases} n > \dfrac{k}{a} \\ \dfrac{k}{b} < n \end{cases} \iff \begin{cases} n > \dfrac{k}{a} \\ n > \dfrac{k}{b} \end{cases} \iff n > \max\left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right)$$

Posons $n_0 = \left\lceil \max\left(\frac{k}{a}, \frac{k}{b}\right) \right\rceil$
Ainsi $\forall n \geqslant n_0, u_n \in I$
Donc $\forall I$ intervalle ouvert tel que $0 \in I, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \in I$
Donc (u_n) converge vers 0. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{k}{n} = 0$.

De même pour les suites $\left(\frac{k}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Démonstration - suite

Intéressons-nous à la suite $(ke^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$.
Soit $k \in \mathbb{R}^*$.
Posons $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = ke^{-n}$.

Soit I un intervalle ouvert tel que $0 \in I$.
Soient a et b deux réels tels que $I =]a, b[$. On a donc $a < 0 < b$

$u_n \in I \iff a < ke^{-n} < b$

Si $k > 0$ alors $ke^{-n} > 0 > a$. De plus, $\exists! x_0 \in \mathbb{R}, e^{x_0} = \frac{b}{k}$
$ke^{-n} < b \iff e^{-n} < \frac{b}{k} \iff e^{-n} < e^{x_0} \iff -n < x_0 \iff n > -x_0$.
Posons $n_0 = \lceil -x_0 \rceil$
$\forall n \geqslant n_0, ke^{-n} < b$
$\forall n \geqslant n_0, a < u_n < b$

Si $k < 0$ alors $ke^{-n} < 0 < b$. De plus, $\exists! x_0 \in \mathbb{R}, e^{x_1} = \frac{a}{k}$
$ke^{-n} > a \iff e^{-n} < \frac{a}{k} \iff e^{-n} < e^{x_1} \iff -n < x_1 \iff n > -x_1$.
Posons $n_0 = \lceil -x_1 \rceil$
$\forall n \geqslant n_0, ke^{-n} < b$
$\forall n \geqslant n_0, a < u_n < b$

Ainsi $\forall I$ intervalle ouvert tel que $0 \in I, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \in I$
Donc (u_n) converge vers 0. Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} ke^{-n} = 0$.

c. Suites sans limite

Définition

Il existe des suites sans limite. On dit qu'elles divergent.

Exemple

La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ diverge car n'a pas de limite.
En effet, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} = 1$ et $u_{2n+1} = -1$.
On ne peut donc pas déterminer de limite à la suite (u_n).

2. Opérations sur les limites

Les règles opératoires sur les limites sont les suivantes :

Somme de deux limites

Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Et si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n + v_n =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit de deux limites

Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n \times v_n =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Quotient de deux limites

Cas où $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n \neq 0$

Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Et si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Cas où $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = 0$

Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n =$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n =$	0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$	0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$	0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 0$	0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 0$	0
alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Remarque

Dans les tableaux ci-dessus, FI signifie forme indéterminée.
Il faut alors trouver une autre façon de déterminer la limite de la suite $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n \times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit qu'il faut lever l'indétermination.

Exemple

1. Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $w_n = 17n^2 - \frac{3}{\sqrt{n}}$.
2. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $p_n = 3n^2 - 2n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $q_n = \frac{n^2+1}{3n-1}$.

Réponse

1. Posons $u_n = 17n^2$ et $v_n = -\frac{3}{\sqrt{n}}$. On a alors $w_n = u_n + v_n$.
   Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$
   Et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = 0$
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = +\infty$
2. Posons $u_n = 3n^2$ et $v_n = -2n$. On a alors $p_n = u_n + v_n$.
   Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$
   Et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = -\infty$
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} p_n = FI$
   Il faut donc lever l'indétermination.
   $p_n = 3n^2 - 2n = n^2\left(3 - \frac{2}{n}\right)$
   Posons $u'_n = n^2$ et $v'_n = 3 - \frac{2}{n}$. On a alors $p_n = u'_n \times v'_n$.
   Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u'_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v'_n = 3$
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} p_n = +\infty$.

Exemple - suite

Réponse - suite

3. Posons $u_n = n^2+1$ et $v_n = 3n-1$. On a alors $q_n = \frac{u_n}{v_n}$.
   Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$
   Et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = +\infty$
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} q_n = FI$
   Il faut donc lever l'indétermination.
   $q_n = \frac{n^2+1}{3n-1} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)} = n \times \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}}$
   Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 1+\frac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 3-\frac{1}{n} = 3$ donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$
   De plus $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n = +\infty$
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n \times \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}} = +\infty$

3. limites et comparaison

Propriété - admise

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.
Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{3}{n} - \frac{1}{2^n}$. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (on pourra le démontrer dans le paragraphe sur les suites géométriques).

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{3}{n}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n \leqslant 0$.

Réponse

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$.
   Donc $-\frac{1}{2^n} < 0$ puis $\frac{3}{n} - \frac{1}{2^n} < \frac{3}{n}$.
   D'où $u_n < \frac{3}{n}$.
2. On sait que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{3}{n} = 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{3}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. De plus, $u_n < \frac{3}{n}$.
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{3}{n}$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n \leqslant 0$.

Propriété

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.
On a alors :

- si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = +\infty$
- si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration - à connaître

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n$.
Démontrons que si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = +\infty$

Soit $A \in \mathbb{R}$.
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, u_n \in [A;+\infty[$
Soit encore $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1, u_n \geqslant A$
A partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$ donc $\exists n_2, \forall n \geqslant n_2, u_n \leqslant v_n$.

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2)$.
$\forall n \geqslant n_0, A \leqslant u_n \leqslant v_n$
$\forall n \geqslant n_0, v_n \geqslant A$
$\forall n \geqslant n_0, v_n \in [A;+\infty[$

Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies v_n \in [A;+\infty[$
Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = +\infty$

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = n + \cos(n)$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n - 1$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n$.

Réponse

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\cos(n) \geqslant 0$.
   Donc $n + \cos(n) \geqslant n - 1$.
   D'où $u_n \geqslant n - 1$.
2. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n - 1 = +\infty$ et que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant n - 1$.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
Si :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
- $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = \ell$

Alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \ell$

Démonstration

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
De plus $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = \ell$
Soit $I =]\alpha;\beta[$ un intervalle ouvert contenant ℓ.

$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \ell$ donc $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_1 \implies u_n \in I$
$\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = \ell$ donc $\exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_2 \implies w_n \in I$
A partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ donc $\exists n_3 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_3 \implies u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$

Posons $n_0 = \max(n_1, n_2, n_3)$.
$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies \begin{cases} u_n \in I \\ w_n \in I \\ u_n \leqslant v_n \leqslant w_n \end{cases}$$
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies \alpha < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \beta$
$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies v_n \in I$
Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = \ell$

Exemple

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n$.

Réponse

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$.
Donc $\frac{-1}{n^2} \leqslant \frac{(-1)^n}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$.
Ou encore $\frac{-1}{n^2} \leqslant v_n \leqslant \frac{1}{n^2}$.
Posons $u_n = \frac{-1}{n^2}$ et $w_n = \frac{1}{n^2}$.
On a donc $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$.
De plus, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = 0$.
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = 0$

III. Convergence d'une suite

Théorème

- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{n-1}{n+1}$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1$
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Réponse

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $u_n = \frac{n-1}{n+1} = \frac{n+1-2}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} - \frac{2}{n+1} = 1 - \frac{2}{n+1} \leqslant 1$
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant 1$
2. $u_{n+1} - u_n = \frac{n+1-1}{n+1+1} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)} - \frac{(n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+n}{(n+1)(n+2)} - \frac{n^2-n+2n-2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n^2+n-n^2+n-2n+2}{(n+1)(n+2)} = \frac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$
   $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ dons la suite (u_n) est croissante.
3. La suite (u_n) est croissante et majorée donc converge.
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n+1} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \frac{2}{n+1} = 1$
   Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

Propriété

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q \leqslant -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration - à connaître

Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Supposons que $q > 1$
  Posons $a = q - 1$. On a alors $q = 1 + a$.
  $q^n = (1+a)^n \geqslant 1 + na$ d'après l'inégalité de Bernoulli.
  Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 + na = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$

- Supposons que $q = 1$
  $\forall n \in \mathbb{N}, q^n = 1^n = 1$
  Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$

- Supposons que $0 < q < 1$
  Posons $p = \frac{1}{q}$.
  $0 < q < 1 \implies \frac{1}{q} > 1 \implies p > 1$
  De plus $\frac{1}{q^n} = \left(\frac{1}{q}\right)^n = p^n$
  Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{p}\right)^n = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{p^n} = 0$

  Supposons que $-1 < q < 0$
  Posons $p = -q$.
  $-1 < q < 0 \implies 0 < -q < 1 \implies 0 < p < 1$
  On a $-p \leqslant q \leqslant p$ donc $(-p)^n \leqslant q^n \leqslant p^n$ et donc $-p^n \leqslant q^n \leqslant p^n$.
  Or $\lim\limits_{n \to +\infty} p^n = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} -p^n = 0$
  Ainsi, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$

- Supposons que $q < -1$
  $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^{2n}(\underbrace{-q}_{>0})^{2n} = \lim\limits_{n \to +\infty} (\underbrace{-q}_{>0})^{2n} = +\infty$
  $\lim\limits_{n \to +\infty} q^{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^{2n+1}(\underbrace{-q}_{>0})^{2n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} -(\underbrace{-q}_{>0})^{2n+1} = -\infty$

Propriété

- La suite (e^n) diverge vers $+\infty$.
- La suite (e^{-n}) converge vers 0.

Démonstration

- Considérons la suite (e^n).
  Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^n \geqslant n$.
  Appelon $\mathcal{P}(n) : e^n \geqslant n$

  - Initialisation :
    $e^1 = e \geqslant 1$ car $e \approx 2,78$ Donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.
  - Hérédité :
    Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ telle que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
    $e^{k+1} = e \times e^k \geqslant ek$
    Or $ek \geqslant k+1 \iff ek - k \geqslant 1 \iff k(e-1) \geqslant 1 \iff k \geqslant \frac{1}{e-1}$
    Or $e - 1 \geqslant 1$ d'où $\frac{1}{e-1} \leqslant 1$
    Ainsi $k \geqslant \frac{1}{e-1}$
    On a bien $e^{k+1} \geqslant ek \geqslant k+1$
    Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  - Conclusion :
    $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(n)$ est vraie. $\forall n \in \mathbb{N}^*, e^n \geqslant n$

    Or $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$.
    La suite (e^n) diverge vers $+\infty$.

- $\forall n \in \mathbb{N}, e^{-n} = \frac{1}{e^n}$.
  Or $\lim\limits_{n \to +\infty} e^n = +\infty$
  Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} e^{-n} = 0$
  La suite (e^{-n}) converge vers 0.

  On peut aussi écrire $\lim\limits_{n \to -\infty} e^n = 0$

IV. Algorithmes

Recherche de seuil

On considère une suite (u_n) (dé)croissante définie par sa valeur $u_0 = k$ donnée et une relation de récurrence $f(u_n)$. Pour trouver à partir de quelle valeur $n \in \mathbb{N}$, on peut utiliser l'algorithme suivant implémenté en Python.

```python
def seuil(nb):
    u=k
    n=0
    while u <(>) nb:
        u=f(u)
        n = n + 1
    return n

```

En prenant l'exemple précédent qui permet de trouver $\sqrt{5}$, déterminer la valeur de n afin que $u_n < 2,237$, on utilisera l'algorithme suivant implémenté en Python :

```python
def seuil(nb):
    u=2
    n=0
    while u > nb:
        u=(u+5/u)/2
        n = n + 1
    return n

```

Dans la console, on tape :

```python
>>> seuil(2.237)
2

```

V. Approfondissement

1. Suites adjacentes

Définition

Deux suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes si et seulement si :

- (u_n) est croissante
- (v_n) est décroissante
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$

Propriété

Deux suites adjacentes convergent vers la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.

Démonstration

Soient (u_n) et (v_n) deux suites adjacentes telles que :

- (u_n) est croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$
- (v_n) est décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n < 0$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$

Posons $\forall n \in \mathbb{N}, h_n = v_n - u_n$
Soit $n \in \mathbb{N}$. $h_{n+1} - h_n = (v_{n+1} - u_{n+1}) - (v_n - u_n) = \underbrace{v_{n+1} - v_n}_{<0} + \underbrace{u_n - u_{n+1}}_{<0} < 0$
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, h_{n+1} - h_n < 0$
La suite (h_n) est donc décroissante et tend vers 0 donc est positive.
$\forall n \in \mathbb{N}, h_n \geqslant 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}, v_n - u_n \geqslant 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant u_n$

On en déduit que :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ car (v_n) est décroissante.
  (u_n) est donc croissante et majorée donc converge vers un réel ℓ_1.
- $\forall n \in \mathbb{N}, u_0 < u_n \leqslant v_n$ car (u_n) est croissante.
  (v_n) est donc décroissante et minorée donc converge vers un réel ℓ_2.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$ donc $\ell_2 - \ell_1 = 0$.
Ainsi $\ell_1 = \ell_2$

Exemple

Soient les suites définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ et $v_n = 1 + \frac{1}{n}$.
Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Réponse

$u_{n+1} - u_n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{n+1-n}{n(n+1)} = \frac{1}{n(n+1)} > 0$
Donc la suite (u_n) est croissante.
De même, la suite (v_n) est décroissante.
$v_n - u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n}$
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{2}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0$.
Les suites (u_n) et (v_n) sont donc adjacentes.
Or $\lim\limits_{n \to +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 1$ et les suites (u_n) et (v_n) convergent vers 1.

2. Relation de récurrence d'ordre 2 à coefficients constants

Définition

Une suite (u_n) est une suite récurrente d'ordre 2 à coefficients constants si et seulement si il existe deux réels a et b tels que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$

Théorème - Raisonnement par récurrence

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété dépendant d'un entier naturel n.
On suppose que :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Pour tout entier naturel k fixé, si $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ sont vraies alors $\mathcal{P}(k+2)$ est vraie.

Alors pour tout entier naturel n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Exemple

On considère la suite de Fibonacci (f_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} f_0 = 1 \\ f_1 = 1 \\ f_{n+2} = f_{n+1} + f_n \end{cases}$

1. Calculer f_2, f_3 et f_4.
2. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_{n+1} > f_n > 0$.
3. En déduire le sens de variation de la suite (f_n). On admettra par la suite que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = +\infty$
4. Soit $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi}$.
   Donner la valeur exacte de φ^2 et φ'^2.
5. Démontrer par récurrence que $f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})$.
6. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$
   (a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+2}}$.
   (b) On pose $\forall n \in \mathbb{N}, p_n = v_{2n+1}$ et $q_n = v_{2n}$
   Démontrer que les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes.
   (c) En déduire que la suite (v_n) converge.
   (d) Démontrer que la suite (v_n) vérifie $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$.
   (e) Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exemple

Réponse

1. $f_2 = f_1 + f_0 = 1 + 1 = 2$
   $f_3 = f_2 + f_1 = 2 + 1 = 3$
   $f_4 = f_3 + f_2 = 3 + 2 = 5$

2. Soit $\mathcal{P}(n) : f_{n+1} \geqslant f_n > 0$.

   - Initialisation :
     $f_2 = 2$ et $f_1 = 1$ donc $f_2 > f_1 > 0$
     $\mathcal{P}(1)$ est donc vraie.
   - Hérédité :
     Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ soient vraies.
     C'est à dire $f_{k+1} > f_k > 0$ et $f_{k+2} > f_{k+1} > 0$.
     Ou encore $f_{k+2} > f_{k+1} > f_k > 0$
     $f_{k+3} = f_{k+2} + f_{k+1} > f_{k+2} > 0$
     Donc $\mathcal{P}(k+2)$ est donc vraie.
   - Conclusion :
     $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.
     $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} > f_n > 0$.

3. $\forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1} > f_n$ donc (f_n) est strictement croissante.

4. $\varphi^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$
   $\varphi'^2 = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1-2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{6-2\sqrt{5}}{4} = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

5. Soit $\mathcal{P}(n) : f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})$

   - Initialisation :
     $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^1 - \varphi'^1) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1 = f_0$ $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2 - \varphi'^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi - \varphi')(\varphi + \varphi') = 1 \times 1 = 1 = f_1$
     $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
   - Hérédité :
     Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ et $\mathcal{P}(k+1)$ soient vraies.
     C'est à dire $f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{k+1} - \varphi'^{k+1})$ et $f_{k+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{k+2} - \varphi'^{k+2})$.
     $f_{k+2} = f_{k+1} + f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{k+2} - \varphi'^{k+2}) + \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{k+1} - \varphi'^{k+1})$
     $f_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{k+2} - \varphi'^{k+2} + \varphi^{k+1} - \varphi'^{k+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{k+2} + \varphi^{k+1} - \varphi'^{k+2} - \varphi'^{k+1})$
     Or $\varphi^{k+2} + \varphi^{k+1} = \varphi^{k+1}(\varphi + 1) = \varphi^{k+1}(\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1) = \varphi^{k+1}(\frac{3+\sqrt{5}}{2}) = \varphi^{k+1}\varphi^2 = \varphi^{k+3}$
     $\varphi'^{k+2} + \varphi'^{k+1} = \varphi'^{k+1}(\varphi' + 1) = \varphi'^{k+1}(\frac{1-\sqrt{5}}{2} + 1) = \varphi'^{k+1}(\frac{3-\sqrt{5}}{2}) = \varphi'^{k+1}\varphi'^2 = \varphi'^{k+3}$
     Ainsi $f_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{k+3} - \varphi'^{k+3})$
     Donc $\mathcal{P}(k+2)$ est donc vraie.
   - Conclusion :
     $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.
     $\forall n \in \mathbb{N}, f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})$.

6. On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{f_{n+1}}{f_n}$

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $v_{n+1} - v_n = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} - \frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{f_{n+2}f_n}{f_nf_{n+1}} - \frac{f_{n+1}^2}{f_nf_{n+1}} = \frac{f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2}{f_nf_{n+1}}$.

Exemple - suite

Réponse - suite

Or $f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+3} - \varphi'^{n+3}) \times \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}) - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+2} - \varphi'^{n+2})\right)^2$
$f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = \frac{1}{5}(\varphi^{2n+4} - \varphi^{n+3}\varphi'^{n+1} - \varphi'^{n+3}\varphi^{n+1} + \varphi'^{2n+4}) - \frac{1}{5}(\varphi^{2n+4} - 2\varphi^{n+2}\varphi'^{n+2} + \varphi'^{2n+4})$
$f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left(-\varphi^{n+3}\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+1} - \varphi^{n+1}\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+3} + 2\varphi^{n+2}\left(-\frac{1}{\varphi}\right)^{n+2}\right)$
$f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left((-1)^{n+2}\varphi^2 + (-1)^{n+4}\frac{1}{\varphi^2} + 2(-1)^{n+2}\right)$
$f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{5}\left(-\varphi^2 - (-\varphi')^2 - 2\right) = \frac{(-1)^{n+1}}{5}\left(-\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{3-\sqrt{5}}{2} - 2\right)$
$f_{n+2}f_n - f_{n+1}^2 = \frac{(-1)^{n+1}}{5} \times 5 = (-1)^{n+1}$
Ainsi $v_{n+1} - v_n = \frac{(-1)^{n+1}}{f_n f_{n+2}}$

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$
$p_{n+1} - p_n = v_{2n+3} - v_{2n+1} = v_{2n+3} - v_{2n+2} + v_{2n+2} - v_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{f_{2n+2}f_{2n+4}} + \frac{(-1)^{2n+1}}{f_{2n}f_{2n+2}}$
$p_{n+1} - p_n = \frac{-1}{f_{2n+2}f_{2n+4}} + \frac{-1}{f_{2n}f_{2n+2}} = -\left(\frac{1}{f_{2n+2}f_{2n+4}} + \frac{1}{f_{2n}f_{2n+2}}\right) < 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, f_n > 0$
Donc (p_n) est décroissante.
De même (q_n) est croissante
Enfin $\lim_{n\to+\infty} p_n - q_n = \lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} - v_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{f_{2n}f_{2n+2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-1}{f_{2n}f_{2n+2}} = 0$ car $\lim_{n\to+\infty} f_n = +\infty$
Ainsi les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes.

(c) Les suites (p_n) et (q_n) sont adjacentes donc convergent vers la même limite ℓ.
On a donc $\lim_{n\to+\infty} v_{2n} = \lim_{n\to+\infty} v_{2n+1} = \ell$
Donc $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}$.
$v_{n+1} = \frac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}+f_n}{f_{n+1}} = \frac{f_{n+1}}{f_{n+1}} + \frac{f_n}{f_{n+1}}1 + \frac{1}{\frac{f_{n+1}}{f_n}} = 1 + \frac{1}{v_n}$
Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$

(e) Soit $\ell = \lim_{n\to+\infty} v_n$.
On a vu que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n}$
Donc par passage à la limite, on a :
$\ell = 1 + \frac{1}{\ell}$
Soit encore $\ell^2 = \ell + 1$ d'où $\ell^2 - \ell - 1 = 0$
ℓ est donc la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$ car $\forall n \in \mathbb{N}, f_n > 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$
L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet donc deux solutions :
$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = \varphi' < 0$
$x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi' - > 0$

Donc $\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
$\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
Le nombre $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est appelé nombre d'or.
On peut donc en trouver une valeur approchée par les termes de la suite (v_n).

3. Etude de la convergence de la méthode de Héron

Exemple

Le but de la méthode du Héron est de déterminer une valeur approchée de $\sqrt{a}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Soit (x_n) la suite définie par $\begin{cases} x_0 = \lceil \sqrt{a} \rceil \\ \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = \dfrac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} \end{cases}$

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geqslant \sqrt{a}$. *On pourra donner une expression de $x_{n+1}^2 - a$ avec $n \in \mathbb{N}$.*
2. Démontrer que la suite (x_n) est croissante à partir du second terme.
3. En déduire la convergence de la suite (x_n).

Réponse

1. Soit $n \in \mathbb{N}$.
   $x_{n+1}^2 - a = \left(\frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}\right)^2 - a = \frac{x_n^2 + 2x_n\frac{a}{x_n} + \left(\frac{a}{x_n}\right)^2}{4} - a = \frac{x_n^2 + 2a + \frac{a^2}{x_n^2}}{4} - \frac{4a}{4} = \frac{x_n^2 - 2a + \frac{a^2}{x_n^2}}{4} = \frac{x_n^2 - 2x_n\frac{a}{x_n} + \frac{a^2}{x_n^2}}{4}$
   $x_{n+1}^2 - a = \left(\frac{x_n - \frac{a}{x_n}}{2}\right)^2 \geqslant 0$
   Aiinsi $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1}^2 - a \geqslant 0$ ou encore $x_{n+1}^2 \geqslant a$ soit $x_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$
   $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n \geqslant \sqrt{a}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} - x_n = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2} - \frac{2x_n}{2} = \frac{-x_n + \frac{a}{x_n}}{2} = \frac{a - x_n^2}{2x_n}$
   Or $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \geqslant \sqrt{a} > 0$.
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, x_n^2 \geqslant a$ ou encore $a - x_n^2 \leqslant 0$
   Ainsi $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$
   Donc la suite (x_n) est décroissante.
3. La suite (x_n) est décroissante et minorée donc converge vers un réel ℓ strictement positif qui vérifie $\ell = \frac{\ell + \frac{a}{\ell}}{2}$.
   $\ell = \frac{\ell + \frac{a}{\ell}}{2} \implies 2\ell = \ell + \frac{a}{\ell} \implies 2\ell^2 = \ell^2 + a \implies \ell^2 = a \implies \ell = \sqrt{a}$
   Donc la suite (x_n) converge vers $\sqrt{a}$.