Chapitre II - Limites de fonctions

Rémi Caneri

Table des matières

I. Limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$

1. Limite infinie

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0; +\infty[$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si, pour tout nombre réel A, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
On écrit $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

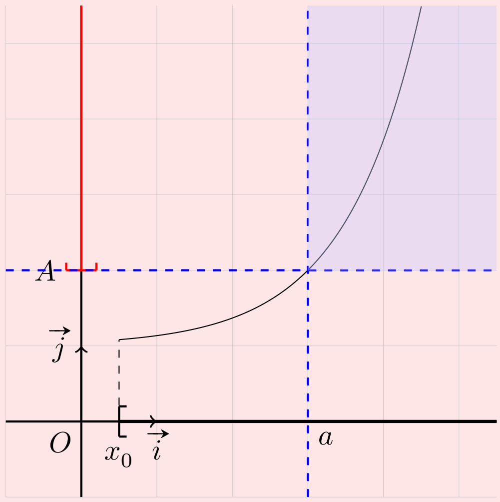
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in [x_0; +\infty[, \forall x \in [x_0; +\infty[, x \geqslant a \implies f(x) \in [A; +\infty[)$$

Remarque

On peut aussi écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in [x_0; +\infty[, \forall x \in [x_0; +\infty[, x \geqslant a \implies f(x) \geqslant A)$$

Interprétation géométrique



Pour tout nombre réel A, il existe un entier réel a tel que les points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \geqslant a$ sont tous dans la partie du plan bleue, c'est-à-dire situés au-dessus de la droite d'équation $y = A$.

Remarque

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0; +\infty[$.
  On a de même :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in [x_0; +\infty[, \forall x \in [x_0; +\infty[, x \geqslant a \implies f(x) \leqslant A)$$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty, x_0]$.
  On a de même :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in]-\infty, x_0], \forall x \in]-\infty, x_0], x \leqslant a \implies f(x) \geqslant A)$$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]-\infty, x_0]$.
  On a de même :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in]-\infty, x_0], \forall x \in]-\infty, x_0], x \leqslant a \implies f(x) \leqslant A)$$

Exemple

Soit f la fonction carrée.
$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2$
Déterminer les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.

Réponse

Soit $A \in \mathbb{R}$
Si $A < 0, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x^2 \geqslant 0 > A$

Supposons donc que $A \geqslant 0$
$f(x) \geqslant A \iff x^2 \geqslant A \iff x \in]-\infty, -\sqrt{A}] \cup [\sqrt{A}, +\infty[$

Cherchons la limite en $+\infty$. On supposera donc que $x \geqslant 0$.
$f(x) \geqslant A \iff x \in [\sqrt{A}, +\infty[$
Posons $a = \sqrt{A}$. On a donc :
$f(x) \geqslant A \iff x \in [a, +\infty[$
Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geqslant a \implies x^2 \geqslant A)$
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Cherchons la limite en $-\infty$. On supposera donc que $x \leqslant 0$.
$f(x) \geqslant A \iff x \in]-\infty, -\sqrt{A}]$
Posons $a = -\sqrt{A}$. On a donc :
$f(x) \geqslant A \iff x \in]-\infty, a]$
Ainsi $\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x \leqslant a \implies x^2 \geqslant A)$
Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

2. Limite finie

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0; +\infty[$. Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On dit que f a pour limite ℓ lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si, pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, l'intervalle I contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.
On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall I \text{ intervalle ouvert contenant } \ell, \exists a \in [x_0; +\infty[, \forall x \in [x_0; +\infty[, (x \geqslant a \implies f(x) \in I)$$

Remarque

On peut aussi écrire :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff (\forall \epsilon > 0, \exists a \in [x_0; +\infty[, \forall x \in [x_0; +\infty[, x \geqslant a \implies \ell - \epsilon \leqslant f(x) \leqslant \ell + \epsilon)$$

ou encore

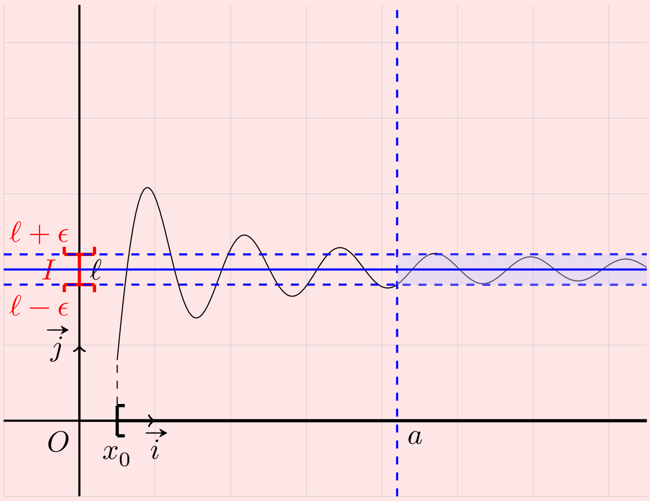
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff (\forall \epsilon > 0, \exists a \in [x_0; +\infty[, \forall x \in [x_0; +\infty[, x \geqslant a \implies |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon)$$

Définition

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.Soit f une fonction définie sur un intervalle.

- Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$, la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en $+\infty$.
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ alors la droite d'équation $y = \ell$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$, la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en $-\infty$.

Interprétation géométrique



Pour tout intervalle ouvert I, il existe un entier naturel a tel que les points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \geqslant a$ sont tous dans la partie du plan bleue, c'est-à-dire compris entre les droites d'équation $y = \ell - \epsilon$ et $y = \ell + \epsilon$.
La droite d'équation $y = \ell$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

Notation

Soit $\ell \in \mathbb{R}$.
On peut écrire :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell^+$ pour indiquer que $f(x)$ se rapproche de ℓ par valeurs supérieures
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell^-$ pour indiquer que $f(x)$ se rapproche de ℓ par valeurs inférieures

C'est notamment utile lorsque $\ell = 0$ pour indiquer le signe de $f(x)$ lorsque x se rapproche de $\pm\infty$.

Exemple

Déterminer la limite de la fonction inverse en $+\infty$. En déduire l'existence éventuelle d'une asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction inverse dans un repère orthonormé.

Réponse

On cherche la limite en $+\infty$ donc on s'intéressera à des valeurs de x positives.
Soit I un intervalle ouvert centré sur 0. On a donc $I =]-b, b[$ avec $b \in \mathbb{R}$.

$$f(x) \in I \iff -b < f(x) < b \iff -b < \tfrac{1}{x} < b \iff \begin{cases} -b < \dfrac{1}{x} \\ \dfrac{1}{x} < b \end{cases} \iff x > \tfrac{1}{b} \text{ car } x > 0$$

En posant $a = \frac{1}{b}$, on a :
$\forall I$ intervalle contenant $0, \exists a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}, (x \geqslant a \implies f(x) \in I)$
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
La droite d'équation $y = 0$ est donc une asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse.

3. Limites de fonctions de référence

Limites des fonctions de référence

- Fonction racine carrée
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- Fonction carrée
  $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$
- Fonction cube
  $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$
- Fonction puissance
  Soit $n \in \mathbb{Z}$ Si $n > 0$ et pair alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty$
  Si $n > 0$ et impair alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty$
  Si $n < 0$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = 0$
  Si $n = 0$ alors $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n = 1$
- Fonction inverse
  $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0^-$
- Fonction exponentielle
  $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$

II. Limite d'une fonction en un nombre réel

1. Limite infinie

Définition

Soit $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0; b[$.
On dit que f a pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers b si et seulement si, pour tout nombre réel A, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de b.
On écrit $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in [x_0; b[, \forall x \in [x_0; b[, x \geqslant a \implies f(x) \in [A; +\infty[)$$

Remarque

On peut aussi écrire :

$$\lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in [x_0; b[, \forall x \in [x_0; b[, x \geqslant a \implies f(x) \geqslant A)$$

Notation

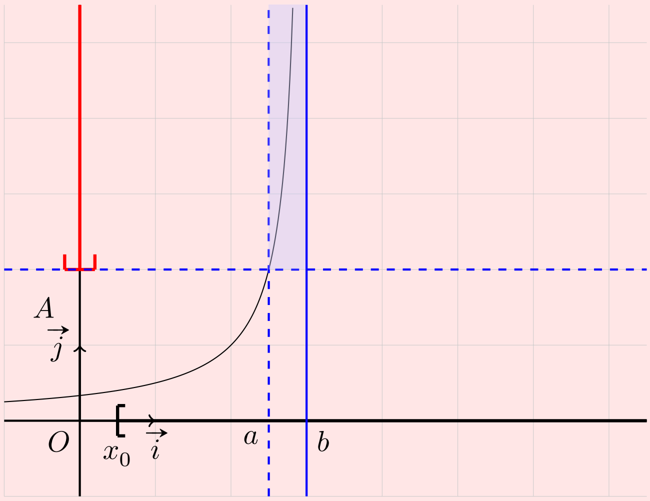
Soit $b \in \mathbb{R}$.
On peut écrire :

- $x \to b^+$, au lieu de $\begin{matrix} x \to b \\ x > b \end{matrix}$, pour indiquer que x se rapproche de b par valeurs supérieures
- $x \to b^-$, au lieu de $\begin{matrix} x \to b \\ x < b \end{matrix}$, pour indiquer que x se rapproche de b par valeurs inférieures

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $b \in I$.
Si $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = -\infty$ alors la droite d'équation $x = b$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, en b.

Interprétation géométrique



Pour tout nombre réel A, il existe un entier réel a tel que les points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \geqslant a$ sont tous dans la partie du plan bleue, c'est-à-dire situés au-dessus de la droite d'équation $y = A$ et entre les droites d'équation $x = b$ et $x = a$. La droite d'équation $x = b$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ en b.

Remarque

Soit $b \in \mathbb{R}$.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $[x_0; b[$.
  $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x < b}} f(x) = -\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in [x_0; b[, \forall x \in [x_0; b[, x \geqslant a \implies f(x) \leqslant A)$
- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]b; x_0]$.
  $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x > b}} f(x) = +\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in]b; x_0], \forall x \in]b; x_0], x \leqslant a \implies f(x) \geqslant A)$
- Soit f une fonction définie sur un intervalle du type $]b; x_0]$.
  $\lim\limits_{\substack{x \to b \\ x > b}} f(x) = -\infty \iff (\forall A \in \mathbb{R}, \exists a \in]b; x_0], \forall x \in]b; x_0], x \leqslant a \implies f(x) \leqslant A)$

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x}$. En déduire l'existence éventuelle d'une asymptote en 0 à la courbe représentative de la fonction inverse dans un repère orthonormé.

Réponse

On cherche la limite en 0+ donc on s'intéressera à des valeurs de x positives et donc de $\frac{1}{x}$ positives.
Soit $A \in \mathbb{R}_+$. $f(x) \geqslant A \iff \frac{1}{x} \geqslant A \iff x \leqslant \frac{1}{A}$
En posant $a = \frac{1}{A}$, on a : $\forall A \in \mathbb{R}_+, \exists a \in \mathbb{R}_+, \forall x \in \mathbb{R}_+, (x \geqslant a \implies f(x) \geqslant A)$. Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse.

2. Limite finie

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
La fonction f admet pour limite le nombre ℓ en a si et seulement si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez proche de a.
On écrit $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

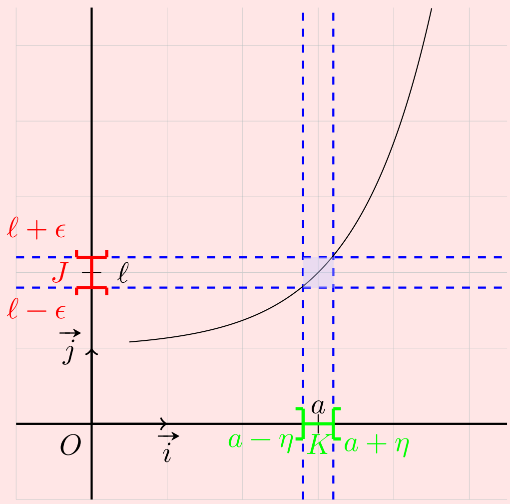
$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall J \text{ intervalle ouvert tel que } \ell \in J, \exists K \text{ un intervalle tel que } a \in K, \\ \forall x \in I, (x \in K \implies f(x) \in J)$$

Remarque

On peut aussi écrire :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell \iff \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - \ell| \leqslant \epsilon)$$

Interprétation géométrique



Pour tout intervalle J contenant ℓ, il existe un intervalle K contenant a tel que les points de coordonnées $(x, f(x))$ avec $x \in K$ sont tous dans la partie du plan bleue, c'est-à-dire situés entre les droites d'équation $y = \ell - \epsilon$ et $y = \ell + \epsilon$ et les droites d'équation $x = a - \eta$ et $x = a + \eta$.
On a $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

3. Limites de fonctions de référence

Limites des fonctions de référence

- <u>Fonction racine carrée</u>
  $\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$
- <u>Fonction inverse</u>
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty$
  $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty$

III. Opérations sur les limites

Dans les tableaux ci-dessous :

- a peut prendre une valeur réelle, $+\infty$ ou $-\infty$.
- ℓ et ℓ' sont des nombres réels.
- FI signifie forme indéterminée. Il faut alors trouver une autre façon de déterminer la limite de la somme, produit ou quotient des deux fonctions f et g. On dit qu'il faut lever l'indétermination.

1. Limite d'une somme

Somme de deux limites

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Exemple

Déterminer la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2$.

Réponse

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + x^2 = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + x^2 = FI$$

On ne peut donc pas déterminer la limite de $f(x)$ en $-\infty$.

2. Limite d'un produit

Produit de deux limites

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2$.

Réponse

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + x^2 = FI$$

Or $x^3 + x^2 = x^2(x+1)$.

De plus $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 + x^2 = -\infty \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

3. Limite d'un quotient

Quotient de deux limites

- Cas où $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$\ell' \neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- Cas où $\lim\limits_{x\mapsto a} g(x) = 0$

Si $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) =$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{x\mapsto a} g(x) =$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) > 0$	0 avec $g(x) < 0$	0 avec $g(x) < 0$	0
Alors $\lim\limits_{x\mapsto a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x)$ et en $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ avec $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

Réponse

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x-1 = -2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x+1 = 0^- \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} \frac{x-1}{x+1} = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{x+1} = FI$$

Or $f(x) = \frac{x-1}{x+1} = \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$

De plus $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{1}{x} = 1 \end{cases} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$

IV. Limite et composition de fonctions

Propriété

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $\forall x \in I, f(x) \in J$.
Soit a in I et $b = \lim\limits_{x \to a} f(x)$.
Si $\lim\limits_{X \to b} g(X)$ existe alors $\lim\limits_{x \to a} g(f(x)) = \lim\limits_{X \to b} g(X)$

Exemple

Soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = \sqrt{x^2 + 5x + 7}$.
Déterminer la limite de u en $-\infty$.

Réponse

Posons $f(x) = x^2 - 5x + 7$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
On a $u(x) = g(f(x))$
$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} g(X) = +\infty$
Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} u(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} g(f(x)) = \lim\limits_{X \to +\infty} g(X) = +\infty$

V. Limites et comparaisons

Dans la suite, a peut prendre comme valeur un réel, $+\infty$ ou $-\infty$ et ℓ peut prendre comme valeur un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Théorème de minoration

Soient f et g deux fonctions telles que pour x proche de a, $f(x) \leqslant g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

Démonstration

Faisons la démonstration dans le cas où $a = +\infty$.
Soient f et g deux fonctions définies sur $[x_0; +\infty[$ telles que pour x assez grand, $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists b \in [x_0; +\infty[, \forall x \in [x_0; +\infty[, x \geqslant a \implies f(x) \geqslant A$
Or $f(x) \leqslant g(x)$
Donc $\forall A \in \mathbb{R}, \exists b \in [x_0; +\infty[, \forall x \in [x_0; +\infty[, x \geqslant a \implies g(x) \geqslant A$
Ainsi $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

Raisonnement analogue si a est un réel ou $-\infty$.

Théorème de majoration

Soient f et g deux fonctions telles que pour x proche de a, $f(x) \leqslant g(x)$.
Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

Démonstration

Analogue au théorème précédent.

Propriété

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

Démonstration

Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^x - x - 1$.
h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $h'(x) = e^x - 1$.
On peut alors dresser le tableau de signes de $h'(x)$ et de variations de h :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit donc que $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) \geqslant 0$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, e^x - x - 1 \geqslant 0$
Soit $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x + 1$
Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x + 1 = +\infty$ donc d'après le théorème de minoration, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$

Théorème d'encadrement, dit des gendarmes

Soient f, g et h trois fonctions telles que pour x proche de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Démonstration

Faisons la démonstration dans le cas où a est un réel.
Soient f, g et h trois fonctions définies sur un intervalle I telles que pour x proche de a, $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$.
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell \iff \forall J$ intervalle ouvert tel que $\ell \in J, \exists K$ un intervalle tel que $a \in K$,
$\forall x \in I, (x \in K \implies f(x) \in J)$
$\lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell \iff \forall J'$ intervalle ouvert tel que $\ell \in J', \exists K'$ un intervalle tel que $a \in K'$,
$\forall x \in I, (x \in K' \implies f(x) \in J')$
Soient J intervalle ouvert tel que $\ell \in J$ et J' intervalle ouvert tel que $\ell \in J'$.
Posons $J'' = J \cap J'$. On a alors $\ell \in J''$.
$\exists K$ un intervalle tel que $a \in K, \forall x \in I, (x \in K \implies f(x) \in J)$
et $\exists K'$ un intervalle tel que $a \in K', \forall x \in I, (x \in K' \implies f(x) \in J')$
Posons $K'' = K \cap K'$ donc $a \in K''$.
Ainsi $\exists K''$ un intervalle tel que $a \in K'', \forall x \in I, (x \in K'' \implies f(x) \in J'')$
Donc $\forall J''$ intervalle ouvert tel que $\ell \in J'', \exists K''$ un intervalle tel que $a \in K'', \forall x \in I, (x \in K'' \implies f(x) \in J'')$
Ainsi $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$

Propriété des croissances comparée

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Démonstration - à connaître

Si $n \in \mathbb{Z}_-$, alors, en posant $k = -n$, on a $k \in \mathbb{N}$
et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^{-k}} = \lim\limits_{x \to +\infty} x^k e^x = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} x^k = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

Supposons maintenant que $n \in \mathbb{N}^*$. Cas particulier de $n = 1$:
Posons $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = e^x - x$
f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f''(x) = e^x - 1$

x	$0 \qquad\qquad +\infty$
$f''(x)$	$+$
f'	$1 \nearrow$
$f'(x)$	$+$
f	$1 \nearrow$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, f(x) \geqslant 0$. Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x - \frac{x^2}{2} \geqslant 0$
ou encore $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^x \geqslant \frac{x^2}{2}$

On a alors $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \frac{e^x}{x} \geqslant \frac{x}{2}$
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$ donc d'après le théorème de minoration, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

Voyons maintenant le cas où $n > 1$.
$\frac{e^x}{x} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{x^n} = \frac{\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n}{\left(n\frac{x}{n}\right)^n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n$
Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{n} = +\infty$
Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$
Ainsi $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = +\infty$ car $\frac{1}{n}$ est un nombre fixe positif.
Et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n}\frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n = +\infty$ car $n > 0$
On a bien $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$

Propriété des croissances comparée

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{Z}$.
$\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} (-1)^n(-x)^n \frac{1}{e^{-x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} (-1)^n \frac{X^n}{e^X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{1}{\frac{e^X}{X^n}} = 0$ car $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X^n} = +\infty$

VI. Approfondissement

Définition

Quand la courbe semble « regarder » dans une direction mais tout en s'en éloignant, on dit que la courbe possède une branche parabolique dont l'axe est donné par la direction que « regarde » la courbe.

Propriété

Si $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ et au moins un des deux éléments a ou ℓ est égal à $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que $\mathcal{C}_f$ possède une branche infinie (une droite).

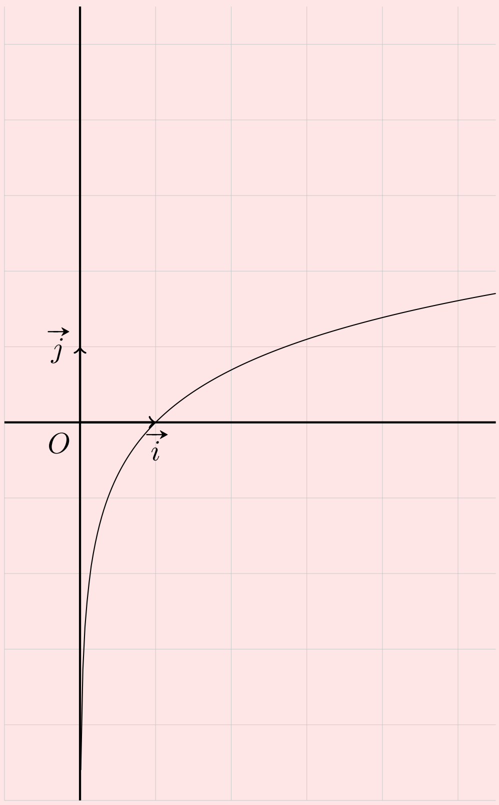
Remarque

Nous avons vu deux types de branches infinies : les asymptotes horizontales et les asymptotes verticales.
Nous supposerons donc pour la suite que $a = \pm\infty$ et $\ell = \pm\infty$.
C'est-à-dire $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Méthode

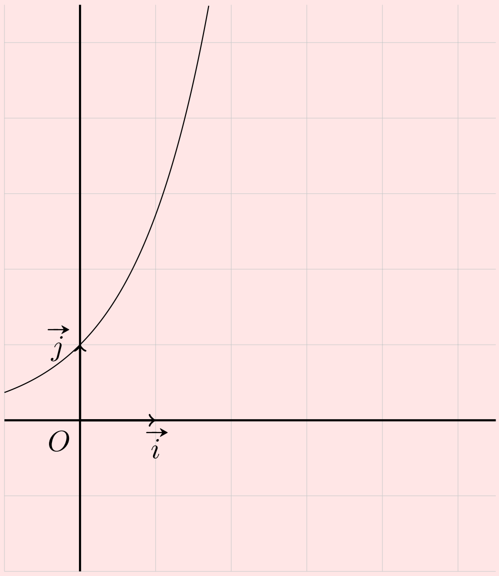
On calcule $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell$

- Si $\ell = 0$ alors la branche infinie est une branche parabolique horizontale (ou d'axe (Ox)).

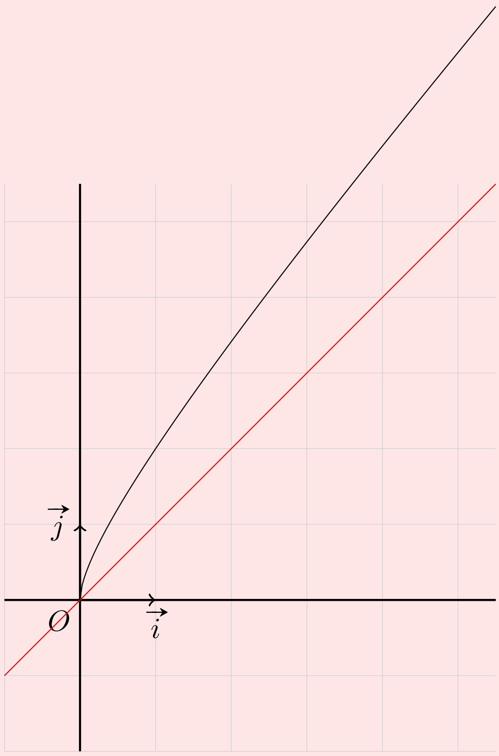


Méthode - suite

- Si $\ell = +\infty$ alors la branche infinie est une branche parabolique verticale (ou d'axe (Oy)).



- Si $\ell = m \in \mathbb{R}^*$ alors on calcule $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - mx) = \ell'$
  - Si $\ell' = \pm\infty$ alors la branche parabolique est une branche parabolique oblique.



Méthode - suite

- $-$ Si $\ell' = p \in \mathbb{R}$ alors la branche parabolique est une asymptote oblique d'équation $y = mx + p$.