Chapitre III - Combinatoire et dénombrement

Rémi Caneri

Table des matières

I. Ensemble fini

Définition

On appelle ensemble fini un ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.

Exemple

- $\{1;3;12;6;8\}$ est un ensemble fini car il possède 5 éléments
- $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini car il possède une infinité d'éléments.

Définition

Le cardinal d'un ensemble fini E , noté $\text{card}(E)$, est le nombre d'éléments qui le composent.

Exemple

$E = \{1;3;12;6;8\}$
$\text{card}(E) = 5$

Définition

Deux ensembles E et F sont disjoints s'ils n'ont pas d'éléments en communs.
Autrement dit, E et F sont disjoints si $E \cap F = \emptyset$.

Exemple

Soient $E = \{1;3;12;6;8\}$, $F = \{1;5;8;15\}$ et $G = \{2;4;7;9\}$
$E \cap F = \{1;8\}$ donc E et F ne sont pas disjoints.
$E \cap G = \emptyset$ donc E et F sont disjoints.
$G \cap F = \emptyset$ donc E et F sont disjoints.

Propriété - admise

Soient E_1, E_2, ...E_p p ensembles finis <u>deux à deux disjoints</u>.
$\text{card}\left(E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_p\right) = \text{card}\left(E_1\right) + \text{card}\left(E_2\right) + ... + \text{card}\left(E_p\right)$
$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^{p} E_i\right) = \sum_{i=1}^{p} \text{card}\left(E_i\right)$

II. p-uplet

Définition

Un p-uplet est une collection ordonnée de p objets.
On note les éléments entre parenthèses, séparés par des ;.
Les éléments sont ordonnés, c'est-à-drie que l'ordre est important.

Si $p = 2$, le 2-uplet s'appelle couple.
Si $p = 3$, le 3-uplet s'appelle triplet.

Exemple

$(1;b;3)$ est un triplet.
$(3;b;1)$ est un autre triplet.
$(1;2;b;6;4;d;6;r)$ est un 8-uplet.
$(5;9)$ est un couple.

Définition

Soient E_1, E_2, ..., E_p p ensembles.

- Le produit cartésien de E_1 par E_2, noté $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des couples $(a;b)$ où $a \in E_1$ et $b \in E_2$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des triplets $(a;b;c)$ où $a \in E_1$, $b \in E_2$ et $c \in E_3$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est l'ensemble des p-uplets $(a_1;a_2;...;a_p)$ où $a_1 \in E_1$, $a_2 \in E_2$, ..., $a_p \in E_p$.

Remarque

On notera E^k le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times ... \times E}_{k \text{ fois}}$

Exemple

Soient $E = \{1;3;12;6;8\}$, $F = \{1;5;8;15\}$ et $G = \{2;4;7;9\}$

$(1;1;2) \in E \times F \times G$
$(12;7) \in E \times G$

Soient $H = \{a;b\}$ et $I = \{1;2;3\}$
Alors $H \times I = \{(a;1);(a;2);(a;3);(b;1);(b;2);(b;3)\}$

Propriété

Soient E_1, E_2, ...E_p p ensembles finis.
$\text{card}\left(E_1 \times E_2 \times ... \times E_p\right) = \text{card}\left(E_1\right) \times \text{card}\left(E_2\right) \times ... \times \text{card}\left(E_p\right)$
$\text{card}\left(\prod_{i=1}^{p} E_i\right) = \prod_{i=1}^{p} \text{card}\left(E_i\right)$

Exemple

Soient $H = \{a;b\}$ et $I = \{1;2;3\}$
$\text{card}(H) = 2$ et $\text{card}(I) = 3$ donc $\text{card}(H \times I) = 2 \times 3 = 6$

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de k-uplets de l'ensemble E est : $\text{card}\left(E^k\right) = n^k$

Démonstration

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$\text{card}\left(E^k\right) = \text{card}\left(\prod_{i=1}^{k} E\right) = \prod_{i=1}^{k} \text{card}\left(E\right) = \prod_{i=1}^{k} n = n^k$

III. Arrangements et permutations

1. Factorielle d'un entier naturel

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle factorielle du nombre n, noté $n!$, le nombre $n! = 1 \times 2 \times ... \times n$.
Par convention, on pose $0! = 1$.

Propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, n = n \times (n-1)!$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $n! = \underbrace{1 \times 2 \times ... \times (n-1)}_{(n-1)!} \times n = (n-1)! \times n$

Exemple

$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

2. Arrangements d'éléments d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Un arrangement de E est un p-uplet d'éléments <u>distincts</u> de E.

Exemple

Soit $E = \{a; b; c; d; e\}$.

$(a; b; c; d)$ est un arrangement de E.
$(b; e; d)$ est un arrangement de E.
$(a; b; a)$ n'est pas un arrangement de E car l'élément a est répété 2 fois.

Remarque

L'ordre des éléments d'un arrangement est important.
Dans l'exemple précédent, $(a, b, c) \neq (b, c, a)$ donc ces deux ararngements sont différents.

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $p \in [\![1; n]\!]$.
Le nombre d'arrangements de p éléments de E est :

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times ... \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Démonstration

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
On cherche à calculer le nombre d'arrangements de p éléments de E, c'est-à-dire le nombre de p-uplet d'éléments distincts de E.
On prend un premier élément pour composer le p-uplet. On a n choix possibles. Il reste $(n-1)$ éléments.
On prend un deuxième élément parmi les $(n-1)$ restants pour compléter le p-uplet. On a $(n-1)$ choix possibles. Il reste $(n-2)$ éléments.
$\vdots$
On prend le p-ième élément parmi les $(n-p+1)$ restants pour finir de compléter le p-uplet. On a $(n-p+1)$ choix possibles.

On a donc en tout $n \times (n-1) \times ... \times (n-p+1)$ arrangements différents.

3. Permutations des éléments d'un ensemble

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E.

Exemple

Soit $E = \{a; b; c\}$.

Les permutations de E sont : $(a; b; c)$, $(a; c; b)$, $(b; a; c)$, $(b; c; a)$, $(c; a; b)$ et $(c; b; a)$.

Remarque

Une permutation étant un arrangement, l'ordre des éléments est important.

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.
Le nombre de permutations de E est $n!$.

Démonstration

Le nombre de permutations de E est le nombre d'arrangements des n éléments de E soit :
$\frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$.

Exemple

Soit $E = \{a; b; c; d\}$.

Le nombre de permutations de E est $4! = 24$.

4. Combinaisons

Définition

Soit E un ensemble.
Soit A un ensemble.
A est un sous-ensemble (ou une partie) de E si tous les éléments de A sont dans E.
On note alors $A \subset E$

Notations

Si un ensemble A n'est pas une partie d'un ensemble E alors on note $A \not\subset E$.
L'ensemble des parties de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Exemple

Soient $E = \{1; 3; 5; 9; 10; 6\}$, $A = \{3; 6; 9\}$ et $B = \{3; 7; 10\}$.

Tous les éléments de A sont dans E donc $A \subset E$.
$7 \in B$ et $7 \notin E$ donc $B \not\subset E$

Remarque

L'ordre des éléments d'une combinaison n'est pas important puisqu'une combinaison est un ensemble.
En effet, l'ensemble composé des éléments a, b et c est le même que celui composé de b, c et a.

Définition

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble de E possédant p éléments.

Exemple

Soit $E = \{a; b; c; d\}$.

$\{a; b; d\}$, $\{b; d\}$ et $\{c\}$ sont des combinaisons de E respectivement de 3, 2 et 1 éléments.

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Soit $p \in\in \mathbb{N}, 0 \leqslant p \leqslant n$.
Le nombre de combinaisons de E possédant p éléments, noté $\binom{n}{p}$, est :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$\binom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial et se lit « p parmi n ».

Démonstration

Soit E un ensemble fini de cardinal n.
Il y a $\frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements à p éléments.

Soit un arrangement $A(n,p)$ de E à p éléments.
Soit $a_1, a_2, ..., a_p$ les éléments de $A(n,p)$.
Considérons l'ensemble $E_p = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$.
Il y a $p!$ permutations de E_p.
Donc il y a $p!$ arrangements de E ayant les éléments $a_1, a_2, ..., a_p$.
Or les combinaisons sont des sous-ensembles de E donc on ne doit compter qu'une fois les arrangements possédant les éléments $a_1, a_2, ..., a_p$.

Le nombre de combinaison est donc $\frac{A(n,p)}{p!} = \frac{\frac{n!}{(n-p)!}}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$.

Exemple

Soit $E = \{a; b; c; d; e; f\}$.

Le nombre de combinaisons de 4 éléments de E est $\binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{720}{24\times 2} = 15$

Il y a donc 15 sous-ensembles de E à 4 éléments :

- $\{a; b; c; d\}$
- $\{a; b; c; e\}$
- $\{a; b; c; f\}$
- $\{a; b; d; e\}$
- $\{a; b; d; f\}$
- $\{a; b; e; f\}$
- $\{a; c; d; e\}$
- $\{a; c; d; f\}$
- $\{a; c; e; f\}$
- $\{a; d; e; f\}$
- $\{b; c; d; e\}$
- $\{b; c; d; f\}$
- $\{b; c; e; f\}$
- $\{b; d; e; f\}$
- $\{c; d; e; f\}$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$.

- $\binom{n}{0} = 1$
- $\binom{n}{n} = 1$
- $\binom{n}{1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Démonstration

Soit E un ensemble de cardinal n.

- – Démonstration avec les ensembles
  Le seul sous-ensemble ayant 0 élément est l'ensemble vide $\emptyset$.
  Donc $\binom{n}{0} = 1$
  – Démonstration par le calcul
  $\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1\times n!} = \frac{n!}{n!} = 1$
- – Démonstration avec les ensembles
  Le seul sous-ensemble ayant n éléments est l'ensemble E.
  Donc $\binom{n}{n} = 1$
  – Démonstration par le calcul
  $\binom{n}{0} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!\times 0!} = \frac{n!}{n!\times 1} = \frac{n!}{n!} = 1$
- – Démonstration avec les ensembles
  Les sous-ensembles composés de 1 élément sont les ensembles de la forme $\{a\}$ avec $a \in E$ or $\text{card}(E) = n$ donc il y a n sous-ensembles composés de 1 élément.
  $\binom{n}{1} = n$
  – Démonstration par le calcul
  $\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n\times(n-1)!}{1\times(n-1)!} = \frac{n}{1} = n$
- $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n\times(n-1)!}{2\times(n-2)!} = \frac{n(n-1)\times(n-2)!}{2\times(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!(n-n+p)!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$.
Donc $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$
Il y a donc autant de sous-ensembles de E à p éléments qu'à $n-p$ éléments.

Exemple

Calculer $\binom{4}{3}$.

Réponse

$\binom{4}{3} = \binom{4}{4-3} = \binom{4}{1} = 4$

Propriété - Relation de Pascal

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration - à connaître

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

- <u>Démonstration avec les ensembles</u>
  Soit E un ensemble fini de cardinal n.
  Le nombre de sous-ensembles de E à p éléments est $\binom{n}{p}$

  Soit a un des éléments de E.
  Le nombre de sous-ensembles de E à p éléments dont l'élément a est $\binom{n-1}{p-1}$. En effet, on choisit $p-1$ autres éléments parmi les $n-1$ éléments restants.
  Le nombre de sous-ensembles de E à p éléments ne contenant pas l'élément a est $\binom{n}{p}$. En effet on choisit p éléments parmi les $n-1$ éléments restants.

  Donc $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n}{p}$

Démonstration - suite

- Démonstration par le calcul

$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-(p-1))!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p+1)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$

$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{p(n-1)!}{p(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-1-p)!\times(n-p)} = \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \times (p+n-p) = \frac{(n-1)!}{p!(n-p)!} \times n$

$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{n(n-1)!}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p}$

Exemple

Calculer $\binom{4}{2}$.

Réponse

$\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + \binom{3}{3-2} = 3 + \binom{3}{1} = 3 + 3 = 6$

Remarque - Triangle de Pascal

Grâce à la relation de Pascal, on peut calculer les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ de proche en proche.

- On convient que $\binom{0}{0} = 1$
- On place 1 sur la colonne « p=0 » et la diagonale « p=n ».
- On obtient un autre nombre du tableau en additionnant le nombre juste au-dessus et celui situé à gauche sur la ligne précédente.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Propriété

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N} | 0 < k \leqslant n, k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 < k \leqslant n$.

$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = k\frac{n\times(n-1)!}{k\times(k-1)!(n-1-k+1)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1)1)!} = n\binom{n-1}{k-1}$

Exemple

Calculer $\binom{5}{3}$.

Réponse

$3\binom{5}{3} = 5\binom{4}{2}$
$2\binom{4}{2} = 4 \times \binom{3}{1} = 4/times3 = 12$
Donc $\binom{4}{2} = \frac{12}{2} = 6$
Ainsi $3\binom{5}{3} = 5 \times 6 = 30$
Et donc $\binom{5}{3} = \frac{30}{3} = 10$

Propriété

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.
Le nombre de sous-ensembles de E est $\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.
On a donc $\text{card}\mathcal{P}(E) = 2^n$

Démonstration - à connaître

- Démonstration avec les ensembles
  Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.
  $E = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$

  D'une part :
  Constituons un sous-ensemble de E en spécifiant, pour chacun des éléments de E s'il appartient ou non à ce sous-ensemble.
  Pour l'élément a_1, soit il appartient au sous-ensemble, soit il n'appartient pas au sous-ensemble. Il y a donc 2 choix possibles pour l'élément a_1. De même pour les autres éléments.
  Il y a donc $\underbrace{2 \times 2 \times ... \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$ façons de constituer un sous-ensemble de E.

  D'autre part :
  A partir des éléments de e, on peut constituer des sous-ensembles à 0 élément, à 1 élément, à 2 éléments, ... à n éléments.
  Or, il y a :
  - $\binom{n}{0}$ sous-ensemble de E à 0 élément.
  - $\binom{n}{1}$ sous-ensemble de E à 1 élément.
  - $\binom{n}{2}$ sous-ensemble de E à 2 éléments.
  - $\vdots$
  - $\binom{n}{n}$ sous-ensemble de E à n éléments.

Démonstration - suite

Donc en tout, il y a $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$ sous-ensembles de E.

Ainsi $\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}=2^n$.

- Démonstration par récurrence
  $\mathcal{P}(n)$: un ensemble à n éléments possèdent 2^n parties.

  - Initialisation : Si $n=0$ alors $E=\emptyset$ et $\mathcal{P}(E)=\{\emptyset\}$ donc $\text{card}\mathcal{P}(E)=1=2^0$
    Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie
  - Hérédité : Supposons qu'il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie.
    Soit $x\notin E$. Posons $E'=E\cup\{x\}.E'$ a donc $k+1$ éléments.
    Parmi les parties de E', il y a celles qui ne contiennent pas x, c'est-à-dire les parties de E. Elles sont au nombre de 2^k. Et il y a celle obtenues en ajoutant x aux parties de E. Elle sont au nombres de 2^k aussi.
    Il y a donc en tout $2^k+2^k=2\times 2^k=2^{k+1}$ parties de E'.
    Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  - Conclusion : tout ensemble à n éléments possèdent 2^n parties

IV. Algorithmes

1. Génération de la liste des coefficients binomiaux

1. Compléter la fonction `coeff_binomial(n, p)` ayant pour paramètres deux entiers n et p tels que $0\leqslant p\leqslant n$ et qui renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.
   Par exemple, `coeff_binomial(5, 2)` renverra :
   `10`
2. Compléter la fonction `liste_coeff_binomiaux(n)` ci-dessous, qui prend en paramètre un entier n et qui renvoie la liste des les coefficients binomiaux $\binom{n}{p}$ avec $0\leqslant p\leqslant n$.
   Par exemple, `liste_coeff_binomiaux(3)` renverra :
   `[1, 3, 3, 1, 0, 0]`

```
def coeff_binomial(n, p):
    if p == 0 or p == n:
        return ...
    else:
        return ... + ...

def liste_coeff_binomiaux(n):
    res = []
    for p in range (...):
        res.append(coeff_binomial(n, p))
    return res
```

Réponse

```python
def coeff_binomial(n, p):
    if p == 0 or p == n:
        return 1
    else:
        return coeff_binomial(n - 1, p - 1) + coeff_binomial(n - 1, p)

def liste_coeff_binomiaux(n):
    res = []
    for p in range (n+1):
        res.append(coeff_binomial(n, p))
    return res
```

2. Génération des permutations d'un ensemble fini

Créer une fonction `permutations(ensemble)` où `ensemble` est une liste et qui renvoie la liste des permutations de `ensemble`.
On utilisera l'algorithme ci-dessous :

Algorithme 1 : Génération de permutations

Entrées : un ensemble E d'éléments sous forme d'une liste
si *l'ensemble est vide* **alors**
  Sorties : la liste vide
sinon si *l'ensemble possède un seul élément* **alors**
  Sorties : la liste composée de l'ensemble E
sinon
  $l \leftarrow [\,]$
  pour *chaque élément a de l'ensemble E* **faire**
    on crée le sous-ensemble F contenant tous les éléments de E autres que a
    pour *chaque permutation p du sous-ensemble F* **faire**
      on ajoute à l le sous-ensemble composé de l'élément a suivi des éléments de la permutation p
    fin
  fin
  Sorties : l
fin

L'instruction `permutations([1,2,3])` renverra :
`[[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]]`

Réponse

```python
def permutations(E):
    if ensemble == []:
        return []
    elif len(E) == 1:
        return [E]
    else:
        l = []
        for i in range(len(E)):
            a = E[i]
            F = E[:i] + E[i+1:]
            for p in permutations(F):
                l.append([a] + p)
        return l
```

3. Génération des parties à 2 ou 3 éléments d'un ensemble fini

- Créer une fonction `parties2(ensemble)` qui prend en paramètre une liste `ensemble` et qui renvoie la liste des parties à 2 éléments de cet ensemble.
  Par exemple `parties2([1,2,3])` renverra :
  `[[1, 2], [1, 3], [2, 1], [2, 3], [3, 1], [3, 2]]`

- Créer une fonction `parties3(ensemble)` qui prend en paramètre une liste `ensemble` et qui renvoie la liste des parties à 3 éléments de cet ensemble. Par exemple `parties3([1,2,3,4])` renverra :
  `[[1, 2, 3], [1, 2, 4], [1, 3, 2], [1, 3, 4], [1, 4, 2], [1, 4, 3], [2, 1, 3], [2, 1, 4], [2, 3, 1], [2, 3, 4], [2, 4, 1], [2, 4, 3], [3, 1, 2], [3, 1, 4], [3, 2, 1], [3, 2, 4], [3, 4, 1], [3, 4, 2], [4, 1, 2], [4, 1, 3], [4, 2, 1], [4, 2, 3], [4, 3, 1], [4, 3, 2]]`

Réponse

```python
def parties2(ensemble):
    res = []
    for i in range(len(ensemble)):
        element = ensemble[i]
        sous_ensemble = ensemble[:i] + ensemble[i + 1:]
        for j in sous_ensemble:
            couple = [element, j]
            res.append(couple)
    return res

def parties3(ensemble):
    res = []
    for i in range(len(ensemble)):
        element1 = ensemble[i]
        sous_ensemble = ensemble[:i] + ensemble[i + 1:]
        for j in range(len(sous_ensemble)):
            element2 = sous_ensemble[j]
            sous_ensemble2 = sous_ensemble[:j] + sous_ensemble[j + 1:]
            for element3 in sous_ensemble2:
                triplet = [element1, element2, element3]
                res.append(triplet)
    return res
```

V. Approfondissement

Combinaisons avec répétitions
Soit un ensemble E fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$

Une combinaison avec répétitions (ou avec remise) de k éléments de E est un ensemble d'éléments de E, les éléments pouvant être répétés.
Par exemple, si $E = \{1; 2; 3\}$ alors $\{1; 1; 2\}$ et $\{1; 2; 3\}$ sont des combinaisons avec répétitions.

Le but de cette section est de trouver le nombre de combinaisons avec répétitions de k éléments de E.

On considère les n éléments de E numérotés de 1 à n.
La combinaison avec répétition de k éléments de E peut être représenté avec des étoiles et des barres :

- On place autant d'étoile qu'il y a le premier élément de E dans la combinaison.
- On place une barre pour séparer cet élément du suivant
- On réitère les deux étapes précédentes pour chaque élément de E, dans l'ordre des éléments de E

- Exception : on ne met pas la dernière barre.

Par exemple, si $E = \{a; b; c; d; e\}$, la combinaison avec répétition $\{a; a; c; d; e; e; e\}$ peut être représentée par $**||*|*|***$

Les répétitions avec répétition de k éléments de E sont représentés avec k étoiles et $n-1$ barres.
Le nombre de telles répétitions est donc le choix du placement des k étoiles parmi tous les symboles à savoir $k+n-1$.
Donc le nombre de telles répéptitions est $\binom{k+n-1}{k}$