Chapitre IV - Successions d'épreuves indépendantes

Rémi Caneri

Table des matières

Chapitre IV - Successions d'épreuves indépendantes **1**

I. Généralités **3**
- 1. Vocabulaire 3
- 2. Rappels sur les variables aléatoires 3
- 3. Épreuves de Bernoulli 4

II. Successions d'épreuves indépendantes **6**
- 1. Généralités 6
- 2. Schéma de Bernoulli 8
- 3. Coefficients binomiaux 9
- 4. Loi binomiale 12
- 5. Méthode de détermination des valeurs de X pour atteindre un seuil lorsque X suit une loi binomiale 17

III. Algorithmes **19**
- 1. La planche de Galton 19
- 2. Problème de surréservation 21

IV. Approfondissements **22**
- 1. Loi géométrique 22
- 2. Loi de Poisson 24

I. Généralités

1. Vocabulaire

Vocabulaire

- Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont le résultat ne peut être prévu et qui , renouvelée dans des conditions identiques, ne donne pas forcément le même résultat.
- L'ensemble de toutes les issues possible d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** noté Ω.
- Une **issue** est un résultat de l'expérience aléatoire.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers. C'est donc un ensemble d'issues de l'univers.
- Un **événement élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue.
- L'**événement certain** est noté Ω.
- L'**événement impossible** est noté $\emptyset$.
- Soit $\mathbb{P}$ une **probabilité** alors on a :
  - $\forall A \in \Omega, 0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Deux événements A et B sont **incompatibles** si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$
- L'événement **contraire** d'un événement A est noté $\overline{A}$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\forall A \in \Omega, \forall B \in \Omega, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

2. Rappels sur les variables aléatoires

Définition

Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire discrète** définie sur Ω est une fonction qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel.

Définition

Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω et $\Omega' = \{x_1; x_2; ...; x_n\}$ est l'ensemble des valeurs prises par X.
Définir la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i de Ω', la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.

Définition

On considère une loi de probabilité définie sur un univers Ω et X une variable aléatoire définie sur Ω dont la loi de probabilité est résumée dans le tableau ci-dessous.

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_n

L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $\mathbb{E}(X)$, défini par :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n$$

La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $V(X)$, défini par :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2 = p_1(x_1 - \mathbb{E}(X))^2 + p_2(x_2 - \mathbb{E}(X))^2 + ... + p_n(x_n - \mathbb{E}(X))^2$$

On a aussi :

$$V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 \right) - (\mathbb{E}(X))^2 = p_1 x_1^2 + p2 x_2^2 + ... + p_n x_n^2 - (\mathbb{E}(X))^2$$

L'**écart type** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

3. Épreuves de Bernoulli

Définition

Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une est appelée succès (S) et l'autre échec ($\overline{S}$).

Exemple

On lance un dé à 6 faces parfaitement équilibré. On appelle succès la sortie du nombre 5 et échec la sortie des nombres 1,2,3,4 et 6. Quelle est la probabilité d'un succès ? d'un échec ?

Réponse

$\mathbb{P}(S) = \frac{1}{6}$
$\mathbb{P}(\overline{S}) = \frac{5}{6}$

Définition

On considère une épreuve de Bernoulli.
Soit $p (0 \leqslant p \leqslant 1)$ la probabilité d'obtenir un succès.
X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
La loi de probabilité de X, présentée dans le tableau ci-dessous, est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.

k	0	1
$\mathbb{P}(X = k)$	$1 - p$	p

On peut écrire $X \sim \mathcal{B}(p)$

Exemple

Une classe comprend 60% de filles. On désigne au hasard un élève de la classe et on note s'il s'agit d'une fille.

1. S'agit-il d'une épreuve de Bernoulli ? Quel est son paramètre ?
2. Soit X la variable aléatoire qui prend 1 comme valeur si l'élève choisi est une fille, 0 sinon. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience.

Réponse

1. Il s'agit bien d'une épreuve de Bernoulli car soit l'élève désigné est une fille soit c'est un garçon. Le succès est « l'élève désigné est une fille » et l'échec est « l'élève désigné est un garçon ».
2.

k	0	1
$\mathbb{P}(X=k)$	$0,4$	$0,6$

La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $0,6$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
On a :

- $\mathbb{E}(X) = p$
- $\mathbb{V}(X) = p(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$

Démonstration

La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre p donc elle suit la loi suivante :

k	0	1
$\mathbb{P}(X=k)$	$1-p$	p

Ainsi $\mathbb{E}(X) = 0 \times \mathbb{P}(X=0) + 1 \times \mathbb{P}(X=1) = 0 \times (1-p) + 1 \times p = p$.
$V(X) = 0^2 \times \mathbb{P}(X=0) + 1^2 \times \mathbb{P}(X=1) - (\mathbb{E}(X))^2 = p - p^2 = p(1-p)$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} == \sqrt{p(1-p)}$

Exemple

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X de l'exemple précédent.

Réponse

La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $0,6$.
Donc $\mathbb{E}(X) = 0,6$
$\mathbb{V}(X) = 0,6(1-0,6) = 0,24$
$\sigma(X) = \sqrt{0,6(1-0,6)} = \sqrt{0,24} \approx 0,49$

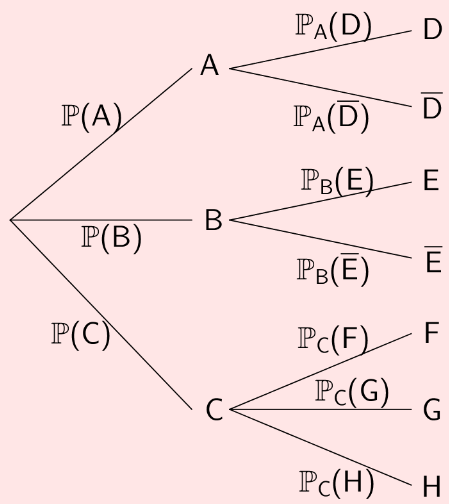
II. Successions d'épreuves indépendantes

1. Généralités

Modélisation

On peut représenter une succession d'épreuves par un arbre pondéré.
Chaque noeud représente un événement.
La racine représente l'événement certain. Mais on ne le note pas dans l'arbre.
Un chemin qui part de la racine jusqu'à une feuille représente l'intersection des événements qui le composent.
Les probabilités des branches d'un niveau sont les probabilités conditionnelles sachant l'événement qui mène à cette branche.

Remarque



Dans l'arbre pondéré ci-dessus :

- A, B, C, D, $\overline{D}$, E, $\overline{E}$, F ,G et H sont des noeuds.
- D, $\overline{D}$, E, $\overline{E}$, F ,G et H sont des feuilles.
- Le chemin qui passe par A et D est l'intersection des événements A et D et se note $A \cap D$.
- $\mathbb{P}_C(F)$ est la probabilité conditionnelle de l'événement F sachant que l'événement C s'est réalisé.

Définition

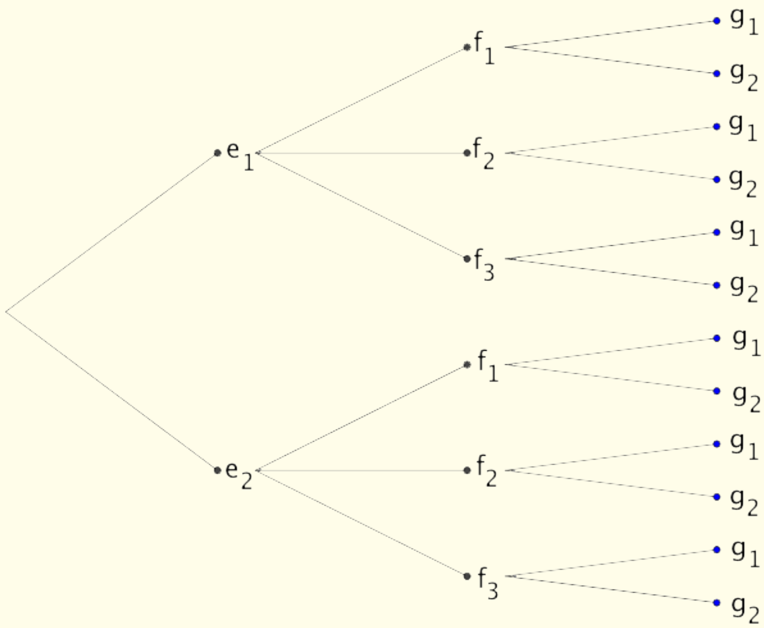
Deux épreuves sont indépendantes si le résultat de la deuxième ne dépend pas du résultat de la première.

Modélisation

On peut représenter une succession de n épreuves indépendantes par un arbre pondéré à n niveaux.
En notant Ω_1, Ω_2, ..., ω_n les univers respectifs de ces n épreuves, la succession de ces n épreuves est une épreuve dont les issues sont des éléments du produit cartésien $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \times ... \times \Omega_n$.

Exemple

On considère une expérience, succession de 3 épreuves indépendantes d'univers respectifs $\Omega_1 = \{e_1, e_2\}$, $\Omega_2 = \{f_1, f_2, f_3\}$ et $\Omega_3 = \{g_1, g_2\}$.
On peut représenter cette expérience par l'arbre ci-dessous :



L'univers Ω de cette expérience est :
$\Omega = \{(e_1, f_1, g_1), (e_1, f_1, g_2), (e_1, f_2, g_1), (e_1, f_2, g_2), (e_1, f_3, g_1), (e_1, f_3, g_2), (e_2, f_1, g_1), (e_2, f_1, g_2), (e_2, f_2, g_1), (e_2, f_2, g_2), (e_2, f_3, g_1), (e_2, f_3, g_2), \}$

Propriété

Lors d'une succession de n épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est égale au produit des probabilités de ses composantes.
Autrement dit, la probabilité d'un chemin dans un arbre pondéré menant de la racine à une feuille est égale au produit des probabilités des branches qui le composent.

$$\mathbb{P}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbb{P}(x_1) \times \mathbb{P}(x_2) \times .. \times \mathbb{P}(x_n)$$

Remarque

Dans le cas d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p, la probabilité d'une issue composée de k succès est $p^k(1-p)^{n-k}$.

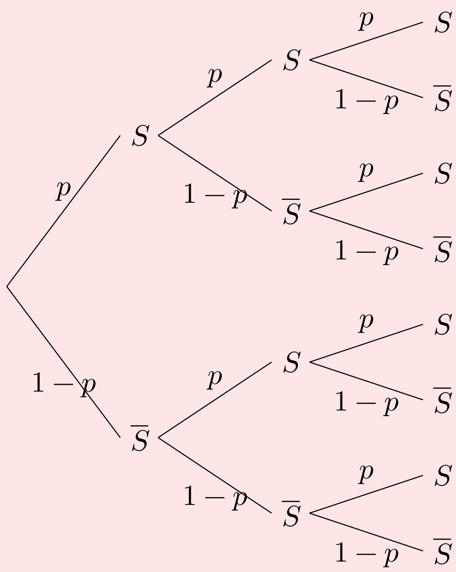
2. Schéma de Bernoulli

Définition

Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

Remarque

On représente souvent un schéma de Bernoulli par un arbre.



Exemple

Une urne contient trois boules rouges et une boule verte.

1. On tire successivement sans remise 3 boules dans l'urne. Obtenir une boule verte est un succès. S'agit-il d'un schéma de Bernoulli ? justifier.
2. On tire successivement avec remise 3 boules dans l'urne. Obtenir une boule verte est un succès. S'agit-il d'un schéma de Bernoulli ? justifier.
3. Dans le cas du schéma de Bernoulli, donner le paramètre de l'épreuve de Bernoulli et établir l'arbre pondéré.

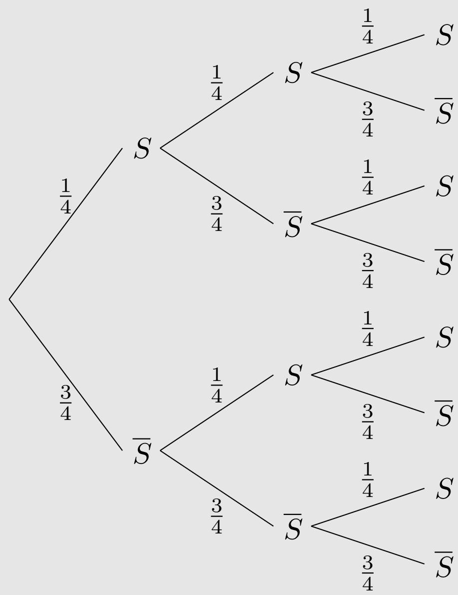
Exemple - suite

Réponse

1. Il ne s'agit pas d'un schéma de Bernoulli car il n'y a pas de remise donc les expériences ne sont pas indépendantes, ni identiques.

2. Il s'agit d'un schéma de Bernoulli car il y a remise donc les expériences sont indépendantes et identiques.

3. Le paramètre de l'épreuve de Bernoulli est donc $\frac{1}{4}$.



3. Coefficients binomiaux

Définition

On représente à l'aide d'un arbre un schéma de Bernoulli, répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

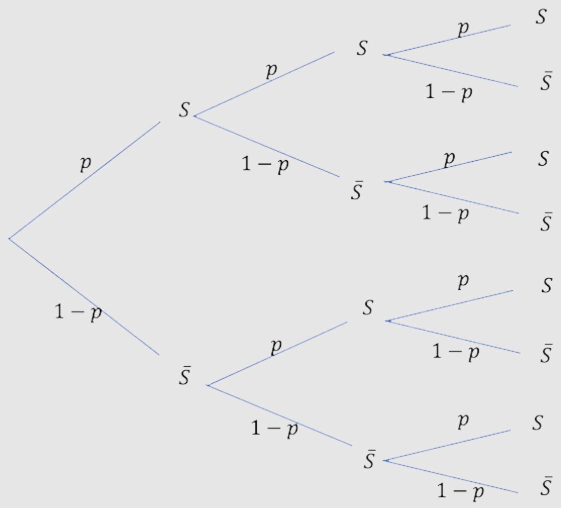
Pour tout entier k, $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de chemins réalisant k succès est noté $\binom{n}{k}$, qui se lit « k parmi n ». Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux.

Exemple

Une urne contient trois boules rouges et une boule verte. On tire successivement avec remise 3 boules dans l'urne. Obtenir une boule verte est un succès. Donner la valeur de $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

Réponse

En créant l'arbre correspondant au schéma de Bernoulli, succession de 3 épreuves identiques et indépendantes,



On obtient immédiatement :

$\binom{3}{0} = 1$ car 1 seul chemin mène à 0 succès.

$\binom{3}{1} = 3$ car 3 chemins mènent à 1 succès.

$\binom{3}{2} = 3$ car 3 chemins mènent à 2 succès.

$\binom{3}{3} = 1$ car 1 seul chemin mène à 3 succès.

Propriété - binôme de Newton

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $b \in \mathbb{R}$.

Démontrons la propriété $\mathcal{P}(n) : (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ par récurrence.

- <u>Initialisation :</u>
  $(a+b)^0 = 1$
  $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1 \times 1 \times 1 = 1$
  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Démonstration - suite

- Hérédité :
Supposons qu'il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(q)$ soit vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.
$(a+b)^{q+1} = (a+b)(a+b)^q = (a+b)\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}a^k b^{q-k} = a\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}a^k b^{q-k} + b\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}a^k b^{q-k}$
$(a+b)^{q+1} = \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}a^{k+1}b^{q-k} + \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}a^k b^{q+1-k}$
En posant $k' = k+1 \iff k = k'-1$ dans la première somme, on a :
$(a+b)^{q+1} = \sum_{k'=1}^{q+1}\binom{q}{k'-1}a^{k'}b^{q-(k'-1)} + \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}a^k b^{q+1-k}$
k' étant une variable muette, on a :
$(a+b)^{q+1} = \sum_{k=1}^{q+1}\binom{q}{k-1}a^k b^{q+1-k} + \sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}a^k b^{q+1-k}$
$(a+b)^{q+1} = \binom{q}{q+1-1}a^{q+1}b^{q+1-(q+1)} + \left(\sum_{k=1}^{q}\binom{q}{k-1}a^k b^{q+1-k}\right) + \binom{q}{0}a^0 b^{q+1-0} + \left(\sum_{k=1}^{q}\binom{q}{k}a^k b^{q+1-k}\right)$
$(a+b)^{q+1} = \binom{q}{q}a^{q+1}b^0 + \left(\sum_{k=1}^{q}\binom{q}{k-1}a^k b^{q+1-k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{q}\binom{q}{k}a^k b^{q+1-k}\right) + \binom{q}{0}a^0 b^{q+1}$
$(a+b)^{q+1} = 1 \times a^{q+1}b^0 + \left(\sum_{k=1}^{q}\left[\binom{q}{k-1} + \binom{q}{k}\right]a^k b^{q+1-k}\right) + 1a^0 b^{q+1}$
$(a+b)^{q+1} = 1 \times a^{q+1}b^0 + \left(\sum_{k=1}^{q}\binom{q+1}{k}a^k b^{q+1-k}\right) + 1a^0 b^{q+1}$
$(a+b)^{q+1} = \binom{q+1}{q+1} \times a^{q+1}b^{q+1-(q+1)} + \left(\sum_{k=1}^{q}\binom{q+1}{k}a^k b^{q+1-k}\right) + \binom{q+1}{0}a^0 b^{q+1-0}$
$(a+b)^{q+1} = \sum_{k=0}^{q+1}\binom{q+1}{k}a^k b^{q+1-k}$
Donc $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.

- Conclusion :
$\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$ est vraie.
$\forall n \in \mathbb{N}, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

Exemple

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Démontrer que $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Réponse

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

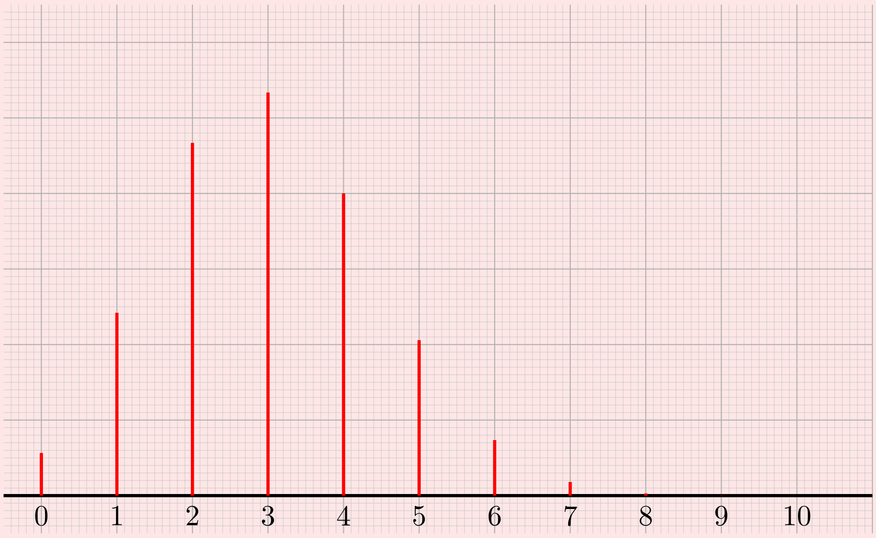
4. Loi binomiale

Définition

On considère un schéma de Bernoulli, répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre p. On note X la variable aléatoire qui associe à cette répétition de n épreuves le nombre de succès.
La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètre n et p.
On note $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

Représentation graphique

On peut représenter graphiquement une loi binomiale par un diagramme en bâtons.



Loi binomiale de parmètres 10 et 0,3

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0; 1]$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.

$$\forall k \in \mathbb{N} | 0 \leqslant k \leqslant n, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration - à connaître

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0; 1]$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
Il y a $\binom{n}{k}$ chemins qui mènent à k succès lors des n répétitions d'épreuves.

Sur chaque chemin, il y a k succès et donc $n - k$ échecs.
La probabilité d'un succès est p et celle d'un échec est $(1 - p)$.
Donc la probabilité d'un chemin qui mène à k succès lors des n répétitions est $p^k(1 - p)^{n-k}$.

Ainsi $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Remarque

La somme des probabilités d'obtention des issues de l'univers valant 1, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [0;1], \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$$

Exemple

On lance trois fois de suite une pièce truquée avec laquelle on obtient Pile deux fois plus souvent que Face. On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus.

1. La variable aléatoire X suit-elle une loi binomiale ? Si oui, donner les paramètres de cette loi.

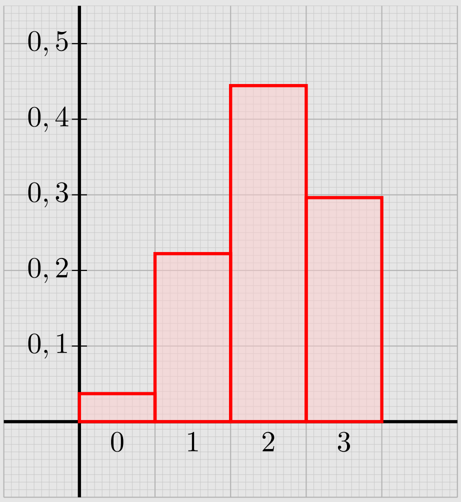
2. Faire un diagramme en barres représentant la loi de probabilité.

Réponse

1. Il y a bien répétition de 3 répétitions d'épreuves de Bernoulli (succès Pile, échec : Face) identiques et indépendantes.
   La variable aléatoire X compte le nombre de succès.
   La probabilité d'obtenir Pile est $\frac{2}{3}$.
   Donc X suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$.
   $X \sim \mathcal{B}\left(3; \frac{2}{3}\right)$.

2. $\mathbb{P}(X=0) = \binom{3}{0} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$
   $\mathbb{P}(X=1) = \binom{3}{1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$
   $\mathbb{P}(X=2) = \binom{3}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{4}{9} \times \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{12}{27}$
   $\mathbb{P}(X=3) = \binom{3}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-3} = 1 \times \frac{8}{27} \times 1 = \frac{8}{27}$

   Voici le diagramme en barres.



Exemple 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.

Démontrer que $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$.

Réponse

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.
$a+b$ ne s'annule pas.
Considérons une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}\left(n; \frac{a}{a+b}\right)$.
En posant $p = \frac{a}{a+b}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = 1$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a}{a+b}\right)^k \left(1 - \left(\frac{a}{a+b}\right)\right)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{(a+b)^k} \left(\left(\frac{b}{a+b}\right)\right)^{n-k}$$

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k}{(a+b)^k} \frac{b^{n-k}}{(a+b)^{n-k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{a^k b^{n-k}}{(a+b)^n} = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}{(a+b)^n}$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} a^k b^{n-k}$$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit $p \in [0;1]$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.

$$\mathbb{E}(X) = np$$

$$V(X) = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0;1]$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k\mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\mathbb{E}(X) = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k} = np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-(k+1)} = np \times 1 = np$$

$$V(X) = \left(\sum_{k=0}^{n} k^2 \mathbb{P}(X=k)\right) - (\mathbb{E}(X))^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \mathbb{P}(X=k)\right) - (np)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\right) - n^2p^2$$

$$V(X) = \left(\sum_{k=1}^{n} kn \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k}\right) - n^2p^2 = np \left(\sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^{k-1} (1-p)^{n-k}\right) - n^2p^2$$

$$V(X) = np \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-(k+1)}\right) - n^2p^2$$

$$V(X) = np \left(\sum_{k=0}^{n-1} 1 \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k)} + \sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}\right) - n^2p^2$$

$$V(X) = np \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-1-k}\right) - n^2p^2$$

Démonstration - suite

$$V(X) = np\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(n-1)\binom{n-2}{k-1}p^k(1-p)^{n-1-k}\right) - n^2p^2$$
$$V(X) = np\left(1 + (n-1)p\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n-2}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-1-k}\right) - n^2p^2$$
$$V(X) = np\left(1 + (n-1)p\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k}(1-p)^{n-1-(k+1)}\right) - n^2p^2$$
$$V(X) = np\left(1 + (n-1)p\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}p^{k}(1-p)^{n-2-k}\right) - n^2p^2$$
$$V(X) = np\left(1 + (n-1)p \times 1\right) - n^2p^2$$
$$V(X) = np + np(n-1)p - n^2p^2 = np + n^2p^2 - np^2 - n^2p^2 = np - np^2 = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

Exemple

On lance trois fois de suite une pièce truquée avec laquelle on obtient Pile deux fois plus souvent que Face. On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus.

1. S'agit-il d'une loi binomiale ? Si oui, donner les paramètres de cette loi.
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 2)$.
3. Faire un diagramme en batons représentant la loi de probabilité.
4. Calculer $E(X)$.
5. Calculer $V(X)$.
6. Calculer $\sigma(X)$.

Réponse

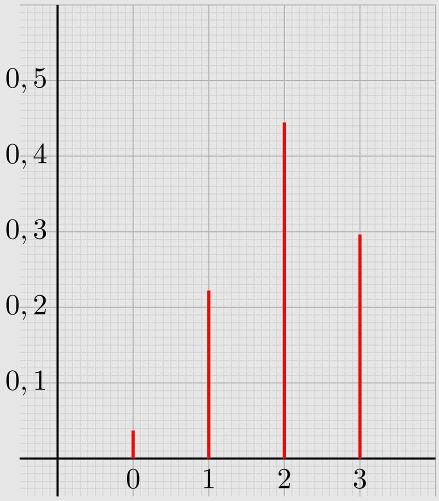
1. Il y a bien répétition de 3 répétitions d'épreuves de Bernoulli (succès Pile, échec : Face) identiques et indépendantes.
   La probabilité du succès p est deux fois plus grande que celle de l'échec $(1-p)$.
   Donc $p = 2(1-p) \iff p = 2 - 2p \iff 3p = 2 \iff p = \frac{2}{3}$
   La variable aléatoire X compte le nombre de succès.
   Donc X suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$.

2. $\mathbb{P}(X = 2) = \binom{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-2} = 3 \times \frac{4}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$

Exemple - suite

Réposne - suite

3.



4. $E(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$
5. $V(X) = 3 \times \frac{2}{3} \times (1 - \frac{2}{3}) = 2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
6. $\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0; 1]$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit $k' \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k' \leqslant n$.

$$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + ... + \mathbb{P}(X = k)$$

$$\mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k') = \mathbb{P}(X \leqslant k') - \mathbb{P}(X \leqslant k - 1)$$

Remarque

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in [0; 1]$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.
Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k < n$.

$$\mathbb{P}(X \geqslant k + 1) = \mathbb{P}(X > k) = \mathbb{P}(k < X \leqslant n) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant k)$$

Exemple

Dans l'exemple précédent, déterminer $\mathbb{P}(X \leqslant 2)$, $\mathbb{P}(X \leqslant 1)$ et $\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 2)$.

Réponse

$\mathbb{P}(X \leqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X > 2) = 1 - \mathbb{P}(X \geqslant 2) = 1 - \mathbb{P}(X = 3) = 1 - \frac{12}{27} = \frac{15}{27}$
$\mathbb{P}(X \leqslant 1) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{27} + \frac{2}{9} = \frac{7}{27}$
$\mathbb{P}(1 \leqslant X \leqslant 2) = \mathbb{P}(X \leqslant 2) - \mathbb{P}(X \leqslant 1 - 1) = \mathbb{P}(X \leqslant 2) - \mathbb{P}(X \leqslant 0) = \frac{15}{27} - \mathbb{P}(X = 0) = \frac{15}{27} - \frac{1}{27} = \frac{14}{27}$

5. Méthode de détermination des valeurs de X pour atteindre un seuil lorsque X suit une loi binomiale

Principe

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0; 1]$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.
Pour déterminer la valeur à partir de laquelle la probabilité cumulée dépasse un seuil α, on cherche la plus petite valeur de k telle que $\mathbb{P}(X \leqslant k) \geqslant \alpha$.

Exemple

Soit $X \sim \mathcal{B}(20; 0,4)$.
A partir de quelle valeur de X la probabilité cumulée $\mathbb{P}(x \leqslant k)$ est-elle supérieure à $0,975$?

Réponse

On crée le tableau des probabilités cumulées croissantes.

n= 20
p= 0,4

k	P(X=k)	P(X<=k)
0	3,66E-05	3,6562E-05
1	0,000487	0,00052405
2	0,003087	0,00361147
3	0,01235	0,01596116
4	0,034991	0,05095195
5	0,074647	0,12559897
6	0,124412	0,25001067
7	0,165882	0,41589294
8	0,179706	0,59559873
9	0,159738	0,7553372
10	0,117142	0,87247875
11	0,070995	0,94347363
12	0,035497	0,97897107
13	0,014563	0,99353412
14	0,004854	0,99838848
15	0,001294	0,99968297
16	0,00027	0,99995266
17	4,23E-05	0,99999496
18	4,7E-06	0,99999966
19	3,3E-07	0,99999999
20	1,1E-08	1

On remarque que :

- $\mathbb{P}(X \leqslant 11) \approx 0,9435$
- $\mathbb{P}(X \leqslant 12) \approx 0,9790$

Donc à partir de $k = 12$, la probabilité cumulée est supérieure à $0,975$.

Principe

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0;1]$.
Soit $X \sim \mathcal{B}(n;p)$.
Pour déterminer un intervalle d'entiers dans lequel la probabilité dépasse un seuil α, on cherche deux entiers a et b tels que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant n$ et $\mathbb{P}(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant \alpha$.
On cherche en général l'intervalle de plus petite amplitude.

Exemple

Soit $X \sim \mathcal{B}(20;0,4)$.
Donner un intervalle $[a;b]$ pour lequel la probabilité $\mathbb{P}(a \leqslant x \leqslant b)$ est supérieure à $0,80$?

Réponse

On crée le tableau des probabilités cumulées croissantes.

n= 20
p= 0,4

k	P(X=k)	P(X<=k)
0	3,66E-05	3,6562E-05
1	0,000487	0,00052405
2	0,003087	0,00361147
3	0,01235	0,01596116
4	0,034991	0,05095195
5	0,074647	0,12559897
6	0,124412	0,25001067
7	0,165882	0,41589294
8	0,179706	0,59559873
9	0,159738	0,7553372
10	0,117142	0,87247875
11	0,070995	0,94347363
12	0,035497	0,97897107
13	0,014563	0,99353412
14	0,004854	0,99838848
15	0,001294	0,99968297
16	0,00027	0,99995266
17	4,23E-05	0,99999496
18	4,7E-06	0,99999966
19	3,3E-07	0,99999999
20	1,1E-08	1

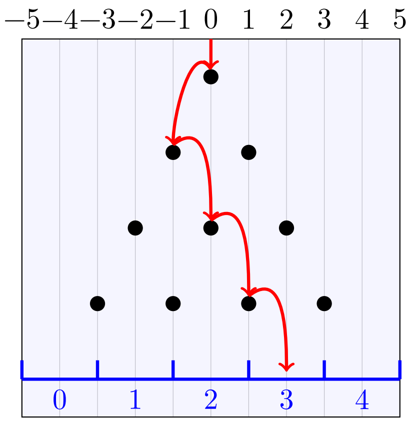
On remarque que :

- $\mathbb{P}(6 \leqslant x \leqslant 20) \approx 0,8744$
- $\mathbb{P}(5 \leqslant X \leqslant 10) \approx 0,8215$
- $\mathbb{P}(6 \leqslant X \leqslant 11) \approx 0,8179$

Les intervalles $[\![6;11]\!]$ et $[\![5;10]\!]$ sont les intervalles de plus faible amplitude dans lesquels la probabilité de X est supérieure ou égale à $0,80$.

III. Algorithmes

1. La planche de Galton



Une bille est lâchée en haut d'une planche de Galton à n rangées de clous. En bas de la planche, elle est recueillie dans une des cases numérotées de 0 à n.
La figure ci-dessus illustre cette situation pour une planche à 4 rangées de clous ($n = 4$).
L'objectif de cet exercice est de simuler le lâcher de k billes dans une planche à n rangées de clous, puis de comptabiliser les billes dans chaque case. Pour cela, une bille sera repérée par son abscisse entière, initialement nulle, qui augmentera ou diminuera de 1 à la suite de chaque choc sur un clou.

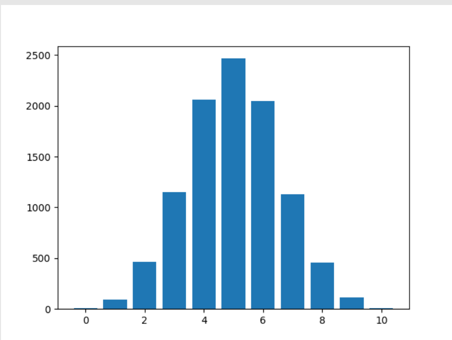
1. On considère une planche à n rangées de clous.
   (a) Combien de cases cette planche comporte-t-elle ?
   (b) Les abscisses entières possibles qu'une bille peut avoir, une fois tombée dans une case ?
   (c) Chaque case possède un indice, le premier étant 0 et le dernier n.
   Quelle est l'expression de cet indice en fonction de x, l'abscisse entière finale de la bille ?
2. Recopier et compléter la fonction Python `abs_finale` qui renvoie l'abscisse finale d'une bille après n chocs, chacun de ces chocs entraînant la bille vers la droite avec une probabilité p.
3. Soit X la variable aléatoire qui prend comme valeur l'indice de la case dans laquelle arrive la bille. Déterminer la loi suivie par X.
4. La fonction `Galton` simule le lâcher de k billes et renvoie un tableau (une liste) du contenu final des cases.
   (a) Quelle est la valeur de la variable `cases` à la ligne 12 ? À quoi sert cette variable ?
   (b) Recopier et compléter la fonction `Galton`.
   (c) Comparer les résultats de `Galton(10000, 10, 0.5)` et `Galton(10000, 10, 0.4)`. Était-ce prévisible ?
   (d) À l'aide du module `matplotlib`, représenter par un diagramme en barres le contenu des cases.

```
1  import random
2  def abs_finale(n, p):
3      x = ...
4      for choc in range(...):
5          if ... :
6              x = ...
7          else:
8              x = ...
9      return x
10
11 def Galton(k, n, p):
12     cases = [0 for i in range(n + 1)]
13     for bille in range(...):
14         x = abs_finale(n, p)
15         indice = ...
16         case[indice] = ...
17     return case
```

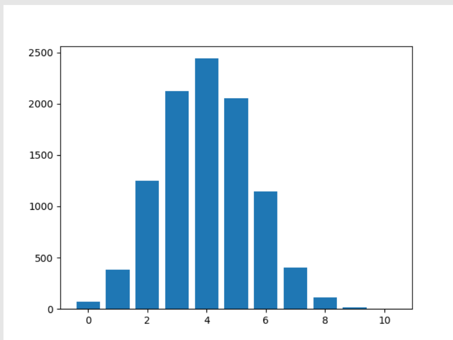
Réponse

1. (a) Cette planche comporte $n+1$ cases.
   (b) Les abscisses entières possibles qu'une bille peut avoir, une fois tombée dans une case, sont $-n+2i, i \in [\![0, n]\!]$
   (c) $-n+2i = x \iff i = \frac{x+n}{2}$
2.
```python
def abs_finale(n, p):
    x = 0
    for choc in range(n):
        if random.random() <= p :
            x = x + 1
        else:
            x = x - 1
    return x
```
3. Si on appelle succès le fait que la bille aille vers la droite lors d'un choc, et échec si elle va vers la droite, chaque choce est une épreuve de Bernoulli de paramètre p. La chute de la bille est donc une succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètres p. Le numéro de la case correspond au nombre de fois que la bille va vers la droite, donc au nombre de succès. La variable aléatoire X compte donc le nombre de succès. X suit donc une loi binomiale de paramètres n et p. $X \sim \mathcal{B}(n, p)$
4. (a) La valeur de la variable `cases` à la ligne 12 est `[0, 0, 0, ..., 0]`, composée de $n+1$ zéros. Le tableau `cases` est initialisé avec le nombre de billes (à savoir 0) dans chaque case, l'indice dans le tableau étant le numéro de la case.
   (b)
```python
def Galton(k, n, p):
    cases = [0 for i in range(n + 1)]
    for bille in range(k):
        x = abs_finale(n, p)
        indice = (x+n)//2
        case[indice] = case[indice] + 1
    return case
```
   (c) L'instruction `Galton(10000, 10, 0.5)` renvoie
   `[15, 89, 424, 1163, 2047, 2434, 2074, 1184, 454, 108, 8]`
   et l'instruction `Galton(10000, 10, 0.4)` renvoie
   `[0, 12, 117, 447, 1078, 2014, 2471, 2190, 1210, 379, 82]`, ce qui était prévisible car si p diminue, il y a plus de chance que les billes aillent à gauche lors de chaque choc.
   (d)
```python
import matplotlib.pyplot as plt
def diagramme_galton(k, n, p):
    names = [i for i in range(n+1)]
    values = Galton(k, n, p)
    plt.bar(names, values)
    plt.show()
```

`diagramme_galton(10000, 10, 0.5)` affiche le diagramme en barres ci-dessous :



`diagramme_galton(10000, 10, 0.4)` affiche le diagramme en barres ci-dessous :



2. Problème de surréservation

Un loueur de trotinettes électriques possède un parc de véhicules toutes exclusivement sur réservation. Il estime que 86% de ses trotinettesréservées sont effectivement louées. À des fins d'optimisation, il s'autorise à pratiquer la surréservation, c'est-à-dire qu'il accepteplus de réservations qu'il ne met en location de trottinettes.

1. On note X la variable aléatoire qui dénombre les trottinettes effectivement louées pour n réservations effectuées.

   (a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres.

   (b) La fonction `binom` ci-dessous renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.

   Recopier et compléter la fonction `surbook` qui renvoie la probabilité $\mathbb{P}(X \leqslant t)$ où X est la variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètre n et p, et t un nombre entier tel que $0 \leqslant t \leqslant n$.

   (c) Appeler dans la console `surbook(45, 50, 0.86)` et interpréter le résultat dans le contexte du problème.

2. Le loueur a pris en compte 100 réservations. À l'aide d'un programme utilisant la fonction `surbook`, déterminer le nombre de trottinettes à mettre à disposition pour que la probabilité d'être en surréservation soit inférieure à 5%.

```python
def binom(n, k):
    e = 1
    k = min(k, n-k)
    for i in range(1, k+1):
        e = (e * (n - k + i)) // i
    return e

def surbook(t, n, p):
    proba = 0
    for k in range(...):
        proba = proba + binom(...) * ... * ...
    return ...
```

Réponse

1. (a) En appelant succès est la location et l'échec la non-location d'une trottinette, la location de cette trottinette est considérée comme une épreuve de Bernoulli de paramètre $0,86$ car il y a 86% de chance que la trottinette réservée soit louée. L'expérience est donc une successions de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètres p. X compte le nombre de trottinettes effectivement louées, donc le nombre de succès. X suit donc une loi binomiale de paramèrte n et $0,86$. $X \sim \mathcal{B}(n; 0,86)$

   (b)
   ```python
   def surbook(t, n, p):
       proba = 0
       for k in range(t):
           proba = proba + binom(n, k) * (p**k) *(1-p)**(n-k)
       return proba
   ```

   (c) `surbook(45, 50, 0.86)` renvoie 0.9994692102078351. Il y a donc plus de $99,9\%$ de chance qu'au plus 45 trottinettes soit effectivement louées sur 50 réservations faites. Autrement dit, il y a moins de $0,1\%$ de chance qu'il y ait de la surréservation avec 45 trottinettes et en faisant 50 réservations.

2. ```python
   def surreservation(n, p):
       t=0
       while 1 - surbook(t, n, p) >= 0.05:
           t = t + 1
       return t
   ```
   `surreservation(100, 0.86)` renvoie 92.
   Il faut donc 92 trottinettes pour 100 réservations afin que la probabilité d'être en surréservation soit inférieure à 5%.

IV. Approfondissements

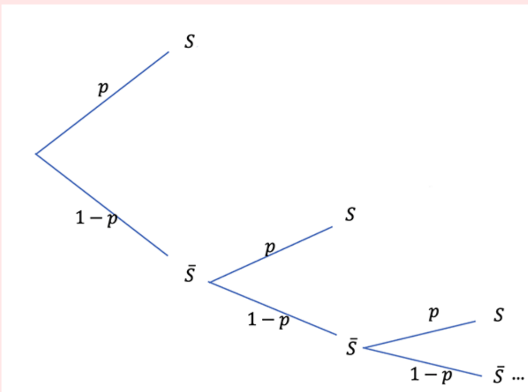
1. Loi géométrique

Définition

On considère une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont la probabilité est $p \in]0;1[$.
La variable aléatoire X compte le nombre d'épreuves nécessaires pour avoir le premier succès.
La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi géométrique de paramètre p.
On écrit $X \sim \mathcal{G}(p)$.

Remarque

On peut représenter cette loi par l'arbre ci-dessous :


   ```

Propriété

Soit $p \in]0;1[$. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$$

Démonstration

Soit $p \in]0;1[$. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$.
$\mathbb{P}(X = k)$ correspond à la probabilité qu'ait le premier succès au bout de k répétitions. Il y a donc $k-1$ échecs. Ainsi $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

Exemple

On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir Pile est $0,4$.
La variable aléatoire X compte le nombre de lancers nécessaire pour obtenir un succès.

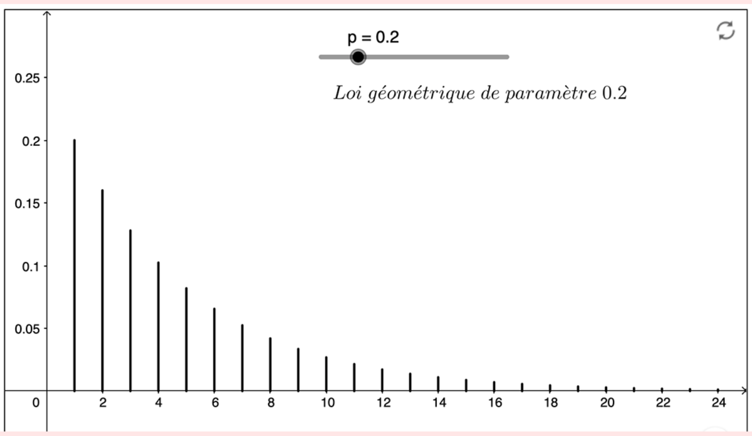
1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X = 3)$.

Réponse

1. On répète des épreuves de Bernoulli (succès : Pile, échec : Face) identiques et indépendantes. La probabilité d'obtenir un succès est $0,4$.
   La variable aléatoire X compte le nombre de lancers nécessaire pour obtenir un succès donc X suit une loi géométrique de paramètre $0,4$.
2. $\mathbb{P}(X = 3) = 0,4(1-0,4)^{3-1} = 0,4 \times 0,6^2 = 0,4 \times 0,36 = 0,144$

Interprétation graphique

On peut représenter cette loi par l'arbre ci-dessous :



Propriété - admise

Soit $p \in]0;1[$. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$.
$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$

Exemple

Dans l'exemple précédent, déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

Réponse

La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $0,4$.
Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0,4} = 2,5$

Propriété

Soit $p \in]0;1[$. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$\mathbb{P}(X > n) = 1 - \mathbb{P}(X \leqslant n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1} = 1 - p\sum_{k=1}^{n}(1-p)^{k-1}$
$\mathbb{P}(X > n) = 1 - p\sum_{k=0}^{n-1}(1-p)^k = 1 - p\frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = 1 - p\frac{1-(1-p)^n}{p} = 1 - (1-(1-p)^n) = (1-p)^n$

Exemple

Dans l'exemple précédent, déterminer $\mathbb{P}(X > 5)$.

Réponse

La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $0,4$.
Donc $\mathbb{P}(X > 5) = (1-0,4)^5 = 0,07776$

Propriété

Soit $p \in]0;1[$. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_{(X>n)}(X > n+k) = \mathbb{P}(X > k)$$

Démonstration

Soit $p \in]0;1[$. Soit $X \sim \mathcal{G}(p)$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
$\mathbb{P}_{(X>n)}(X > n+k) = \frac{\mathbb{P}((X>n)\cap(X>n+k))}{\mathbb{P}(X>n)} = \frac{\mathbb{P}(X>n+k)}{\mathbb{P}(X>n)} = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k)$

Remarque

On dit qu'une loi géométrique est une loi sans mémoire. Cela veut dire qu'attendre plus de k épreuves pour obtenir un succès a la même probabilité que l'on parte de la 1ère épreuve ou de la 50ème épreuve sachant que l'on n'a pas obtenu de succès sur les 50 premières épreuves.

Exemple

Dans l'exemple précédent, déterminer $\mathbb{P}_{(X>5)}(X>8)$.

Réponse

La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $0,4$.
Donc $\mathbb{P}_{(X>5)}(X>8) = \mathbb{P}(X>3) = (1-0,4)^3 = 0,064$

2. Loi de Poisson

Définition

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $k \in \mathbb{N}$.
Soit X une variable aléatoire qui compte le nombre de succès lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
Si le nombre moyen de succès dans un intervalle de temps fixé est λ alors la probabilité qu'il existe exactement k succès dans cet intervalle de temps est

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre λ. $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Propriété - admise

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$

$$V(x) = \lambda$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\lambda}$$

Exemple

On observe le nombre d'accidents de scooters à un carrefour sur un an. On admet que la probabilité d'avoir un accident à un moment donné de l'année est toujours le même : $p \in]0;1[$.
Soit S_n la variable aléatoire qui compte le nombre d'accidents à ce carrefour lors de n passages de scooter. On observe que l'espérance de X est 10.

1. Donner l'expression de p en fonction de n.
2. Donner l'expression de $\mathbb{P}(S_n = k)$ en fonction de n et k où $0 \leqslant k \leqslant n$.
3. La fonction ln est une fonction ayant les propriétés suivantes :
   - $\ln(x) = y \iff x = e^y$
   - $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall b \in \mathbb{R}, \ln(a^b) = b\ln(a)$
   - $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$
   - $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$
   - $\forall x \in \mathbb{R}, \ln(e^x) = x$

   (a) Démontrer que $\ln(\mathbb{P}(S_n = 0)) = -10\frac{\ln(1-\frac{10}{n})}{\frac{-10}{n}}$.

   (b) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = e^{-10}$.

   (c) Démontrer que $\mathbb{P}(S_n = k+1) = \mathbb{P}(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}$ où $k \in [\![0;n]\!]$.

   (d) Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-10}\frac{10^k}{k!}$ pour $k \in [\![0;n]\!]$ alors pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k+1) = e^{-10}\frac{10^{k+1}}{(k+1)!}$.

   (e) Démontrer par récurrence que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-10}\frac{10^k}{k!}$ où $k \in [\![0;n]\!]$.
4. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $e^{-10}\frac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\mathbb{P}(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooter à ce carrefour.

Réponse

1. $S_n \sim \mathbb{B}(n;p)$ donc $\mathbb{E}(X) = np$.
   De plus $\mathbb{E}(X) = 10 \iff np = 10 \iff p = \frac{10}{n}$
2. $\mathbb{P}(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k}$
3. (a) $\ln(\mathbb{P}(S_n = 0)) = \ln\left(\binom{n}{0}\left(\frac{10}{n}\right)^0 \left(1-\frac{10}{n}\right)^{n-0}\right) = \ln\left(1 \times 1 \times \left(1-\frac{10}{n}\right)^n\right) = \ln\left(\left(1-\frac{10}{n}\right)^n\right)$

   $\ln(\mathbb{P}(S_n = 0)) = n\ln\left(1-\frac{10}{n}\right) = -10\frac{n}{-10}\ln\left(1-\frac{10}{n}\right) = -10\frac{\ln(1-\frac{10}{n})}{\frac{-10}{n}}$.

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\mathbb{P}(S_n = 0)) = -10$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = e^{-10}$

Exemple - suite

Réponse - suite

3. (c) Soit $k \in [\![0;n]\!]$.

$\mathbb{P}(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1} = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k} \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}$

$= \frac{n!}{k!(n-k)!} \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k} \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}$

$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k-1} \times \left(1 - \frac{10}{n}\right) \frac{10}{n-10}$

$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k-1} \times \left(\frac{n-10}{n}\right) \frac{10}{n-10}$

$= \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \left(\frac{10}{n}\right)^k \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k-1} \times \left(\frac{10}{n}\right)$

$= \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \left(\frac{10}{n}\right)^{k+1} \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-(k+1)}$

$= \begin{pmatrix} n \\ k+1 \end{pmatrix} \left(\frac{10}{n}\right)^{k+1} \left(1 - \frac{10}{n}\right)^{n-k-1}$

$= \mathbb{P}(S_n = k+1)$

(d) Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!}$

alors $0 \leqslant k+1 \leqslant n$ et :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k+1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) \times \frac{n-k}{n-10} \times \frac{10}{k+1}$

$\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k+1) = e^{-10} \frac{10^k}{k!} \times 1 \times \frac{10}{k+1} = e^{-10} \frac{10^{k+1}}{(k+1)!}$.

(e) Posons $\mathcal{P}(k)$: $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!}$ où $k \in [\![0;n]\!]$.

- Initialisation :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = 0) = e^{-10} = e^{-10} \frac{10^0}{0!}$
  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons qu'il existe $q \in [\![0;n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(q)$ soit vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.
  $\mathcal{P}(q)$ est vraie donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = q) = e^{-10} \frac{10^q}{q!}$.
  Donc, d'après la question (c), $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = q+1) = e^{-10} \frac{10^{q+1}}{(q+1)!}$.
  Ainsi $\mathcal{P}(q+1)$ est vraie.
- Conclusion :
  $\forall k \in [\![0,n]\!], \mathcal{P}(k)$ est vraie.
  Ainsi $\forall k \in [\![0,n]\!], \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(S_n = k) = e^{-10} \frac{10^k}{k!}$
  La loi binomiale de paramètres $(n;0,1)$ converge vers la loi de Poisson de paramètre 10.
  $\mathcal{B}(n;0,1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathcal{P}(10)$

4. $\mathbb{P}(S_n \geqslant 3) = 1 - \mathbb{P}(S_n < 3) = 1 - (\mathbb{P}(S_n = 0) + \mathbb{P}(S_n = 1) + \mathbb{P}(S_n = 2))$

$\mathbb{P}(S_n \geqslant 3) = 1 - \left(e^{-10} \frac{10^0}{0!} + e^{-10} \frac{10^1}{1!} + e^{-10} \frac{10^2}{2!}\right) = 1 - e^{-10} \left(1 + 10 + \frac{100}{2}\right) = 1 - 61e^{-10}$

$\mathbb{P}(S_n \geqslant 3) \approx 0,9972$

Quand il y a un très grand nombre de scooter qui passent à ce carrefour, il y a $99,7\%$ de chance qu'au moins trois scooter aient un accident, autrement dit, il y a $0,3\%$ de chance qu'il y ait moins de 3 accidents de scooters à ce carrefour. Il est donc extrêmement rare qu'il y ait moins de 3 accidents à ce carrefour.