Chapitre V - Continuité des fonctions d'une variable

Rémi Caneri

Table des matières

I. Fonction continue

1. Généralités

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit $a \in I$.
La fonction f est continue en a si et seulement si pour tout intervalle ouvert J contenant $f(a)$, il existe un intervalle ouvert I' contenant a tel que pour tout x appartenant à I', $f(x)$ appartient à J.

$$f \text{ est continue en } a \iff \forall J | f(a) \in J, \exists I' \text{ un intervalle ouvert de } I | a \in I', \forall x \in I', f(x) \in J$$

Remarque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Soit $a \in I$.

$$f \text{ est continue en } a \iff \lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = f(a)$$

$$f \text{ est continue en } a \iff \forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in I, (|x - a| \leqslant \eta \implies |f(x) - f(a)| \leqslant \epsilon)$$

Exemple

Démontrer que la fonction racine carrée est continue en 0.

Réponse

La fonction racine carrée est définie sur $\mathbb{R}_+$.
$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x \in \mathbb{R}_+}} \sqrt{x} = 0 = \sqrt{0}$
Donc la fonction racine carrée est continue en 0.

Définition

Soif f une fonction définie sur un intervalle I.
f est continue sur I si et seulement si pour tout nombre a de l'intervalle I, f est continue en a.

Remarque

Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors on peut tracer $\mathcal{C}_f$, sa représentation graphique sur I, sans lever le crayon.

Propriété - admise

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$.

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Exemple

Démontrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto e^{x^2} \in \mathbb{R}_+$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse

f est définie sur $\mathbb{R}$ car les fonctions exponentielle et carrée le sont.
Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x) = 2xe^{x^2}$
Les fonctions exponentielle, carrée et linéaire $x \mapsto 2x$ étant définie sur $\mathbb{R}$, la fonction f' est donc définie sur $\mathbb{R}$.
Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

2. Fonctions usuelles

Propriété - admise

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.
- Toute fonction définie sur un intervalle I et obtenue par opérations ou composition à partir des fonctions précédentes est continue sur I.

Exemple

Démontrer que la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3 + e^{x^2} \in \mathbb{R}_+$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse

$g : x \mapsto x^2$ est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
$h : x \mapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc sur $\mathbb{R}_+$.
Donc la fonction $h \circ g$, composée de ces deux fonctions est continue sur $\mathbb{R}$.
De plus, $p : x \mapsto x^3$ est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$.
Donc la fonction $p + h \circ g$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2

Démontrer que la fonction $f : x \in]1; +\infty[\mapsto \frac{x+2}{x-1}$ est continue.

Réponse

f est bien définie sur $]1; +\infty[$ car le dénominateur ne s'annule pas sur cet intervalle.
$x \mapsto x + 2$ est une fonction polynôme (affine) donc est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]1; +\infty[$.
$x \mapsto x - 1$ est une fonction polynôme (affine) donc est continue sur $\mathbb{R}$ et donc sur $]1; +\infty[$.
Donc la fonction f, quotient de ces deux fonctions est continue sur $]1; +\infty[$.

3. Image d'une suite convergente par une fonction continue

Définition

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
L'image de la suite (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$.

Propriété - admise

Soit (u_n) une suite convergente vers un réel ℓ.
Soit I un intervalle tel que $\ell \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.
Pour toute fonction f définie sur I et continue en ℓ, la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Exemple

Démontrer que la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n = e^{\frac{1}{n}}$ converge.

Réponse

Posons (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \frac{1}{n}$.
Posons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.
On a bien $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = f(u_n)$.
De plus, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$.
La suite (u_n) converge donc var $\ell = 0$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc en particulier en 0.
Ainsi la suite $f(u_n))$ converge vers $f(0)$
Et donc la suite (v_n) converge vers 1.

Propriété

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé I telle que $f(I) \subset I$.
Soit (u_n) une suite définie par son premier terme $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
On a alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
- Si la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé I telle que $f(I) \subset I$.
Soit (u_n) une suite définie par son premier terme $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Démontrons par récurrence la proposition $\mathcal{P}(n) : u_n \in I$.

- Initialisation :
  $u_0 \in I$ donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité :
  Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  $\mathcal{P}(k)$ est vraie donc $u_k \in I$
  $f(I) \subset I$ donc $\forall x \in I, f(x) \in I$
  $u_{k+1} = f(u_k)$ et $u_k \in I$ donc $f(u_k) \in I$
  Ainsi $u_{k+1} \in I$
- Conclusion :
  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$

Supposons que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$.
f étant continue sur I et en particulier en ℓ alors la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.
C'est-à-dire $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(\ell)$
Or $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = u_{n+1}$
Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$.
Donc par unicité de la limite, $f(\ell) = \ell$.

Exemple

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0,5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = -0,2u_n(u_n - 8) \end{cases}$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;3]$ et que la suite (u_n) converge. Vous en donnerez alors la limite.

Réponse

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -0,2x(x-8)$.
On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
De plus la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in [0;3]$.

$0 \leqslant x \leqslant 3 \implies \begin{cases} -6 \leqslant -2x \leqslant 0 \\ -8 \leqslant x-8 \leqslant -5 \leqslant 0 \end{cases} \implies -2x(x-8) \geqslant 0$

Donc $\forall x \in [0;3], f(x) \geqslant 0$

Cherchons le signe de $f(x) - 3$
$f(x) - 3 = -0,2x(x-8) - 3 \iff -0,2x^2 + 1,6x - 3$
$\Delta = 1,6^2 - 4 \times (-0,2) \times (-3) = 2,56 - 2,4 = 0,16 > 0$
$x_1 = \frac{-1,6-\sqrt{0,16}}{2\times(-0,2)} = \frac{-1,6-0,4}{-0,4} = \frac{-2}{-0,4} = 5$
$x_2 = \frac{-1,6+\sqrt{0,16}}{2\times(-0,2)} = \frac{-1,6+0,4}{-0,4} = \frac{-1,2}{-0,4} = 3$

x	$-\infty$		3		5		$+\infty$
$-0.2x^2 + 1.6x - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Donc $\forall x \in [0;3], f(x) - 3 \leqslant 0$
Donc $\forall x \in [0;3], f(x) \geqslant 3$
On a bien $\forall x \in [0;3], f(x) \in [0;3]$ que l'on peut écrire $f([0;3]) \subset [0;3]$

Enfin $u_0 = 0,5 \in [0;3]$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;3]$.
Déterminons le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [0;3]$.
$f(x) - x = -0,2x^2 + 1,6x - x = -0,2x^2 + 0,6x = -0,2x(x-3)$
Or $-0,2x \leqslant 0$ et $x - 3 \leqslant 0$ donc $-0,2x(x-3) \geqslant 0$
Ainsi $\forall x \in [0;3,]f(x) - x \geqslant 0$ uu encore $\forall x \in [0;3,]f(x) \geqslant x$
Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in [0;3]$.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) \geqslant u_n$ ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$
La suite (u_n) est donc croissante.
De plus elle est majorée par 3. Donc elle converge vers une limite ℓ telle que ℓ soit solution dans $[0;3]$ de l'équation $f(x) = x$.

$f(x) = x \iff f(x) - x = 0 \iff -0,2x(x-3) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$
Donc $\ell = 0$ ou $\ell = 3$.
Or (u_n) est croissante et $u_0 = 0,5$ donc la seule valeur possible est $\ell = 3$.

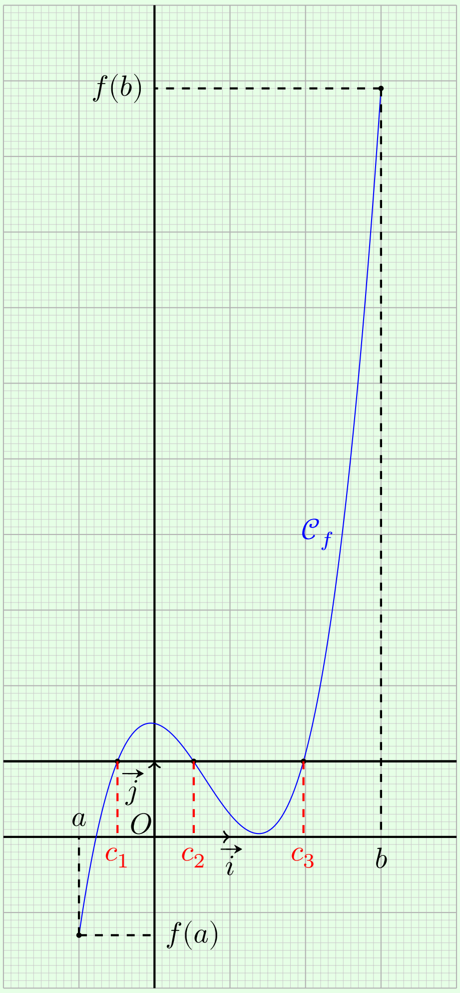
II. Théorème des valeurs intermédiaires

1. Généralités

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Interprétation graphique



La droite d'équation $y = k$ coupe la courbe $\mathcal{C}_f$ en au moins un point (ici trois points d'abscisses respectives c_1, c_2 et c_3).

Exemple

Démontrer que l'équation $e^x - x = 2$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

Réponse

Posons $f(x) = e^x - x$.
f est dérivable et continue sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = e^x - 1$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x) = e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Exemple - suite

Réponse - suite

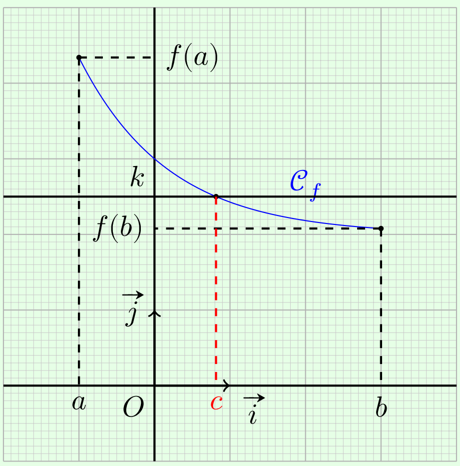
$\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x = +\infty$, $e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x - x = \lim\limits_{x \to +\infty} x\left(\frac{e^x}{x} - 1\right) = +\infty$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) \in [1; +\infty[$
Or $2 \in [1; +\infty[$ donc l'équation $e^x - x = 2$ admet au moins une solution sur $\mathbb{R}$.

2. Cas des fonctions strictement monotones

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Interprétation graphique



La droite d'équation $y = k$ coupe la courbe $\mathcal{C}_f$ en un seul point.

Exemple

Démontrer que l'équation $e^x = 2$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.
Grâce à un outil numérique, vous en donnerez une valeur approchée à 10^{-4} près par défaut.

Réponse

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.
$e^0 = 1$ et $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
Or $2 \in [1; +\infty[$ donc l'équation $e^x = 2$ admet une unique solution sur $[0; +\infty[$.
Un tableur nous donne :

x	exp(x)
0,69	1,99371553
0,6901	1,99391491
0,6902	1,99411432
0,6903	1,99431374
0,6904	1,99451318
0,6905	1,99471264
0,6906	1,99491212
0,6907	1,99511162
0,6908	1,99531114
0,6909	1,99551068
0,691	1,99571025
0,6911	1,99590983
0,6912	1,99610943
0,6913	1,99630905
0,6914	1,99650869
0,6915	1,99670835
0,6916	1,99690803
0,6917	1,99710773
0,6918	1,99730745
0,6919	1,99750719
0,692	1,99770695
0,6921	1,99790674
0,6922	1,99810654
0,6923	1,99830636
0,6924	1,9985062
0,6925	1,99870606
0,6926	1,99890594
0,6927	1,99910584
0,6928	1,99930576
0,6929	1,9995057
0,693	1,99970566
0,6931	1,99990564
0,6932	2,00010564
0,6933	2,00030566
0,6934	2,0005057

Donc la valeur approchée par défaut à 10^{-4} près de la solution cherchée est $0,6931$.

III. Algorithmes

1. Méthode de dichotomie

Principe

La méthode de dichotomie est un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction (d'une valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$). Elle consiste à répéter des partages d'un intervalle en deux parties puis à sélectionner le sous-intervalle dans lequel existe un zéro de la fonction.

Algorithme 1 : recherche d'un zéro d'une fonction par dichotomie à 10^{-n}

Entrées : a : borne de gauche de l'intervalle
b : borne de droite de l'intervalle
n : un entier
tant que $b - a > 10^{-n}$ **faire**
  $m \leftarrow \frac{a+b}{2}$
  si $f(a) \times f(m) < 0$ **alors**
    b←m
  sinon
    a←m
  fin
fin
Sorties : res

Exemple

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1; 1]$.
2. En utilisant un algorithme de dichotomie, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. Implémenter cet algorithme en Python.

Réponse

1. La fonction f est dérivable sur $[-1; 1]$ et $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1)$
   On peut donc dresser le tableau de signes de $f'(x)$ et de variation de f suivant :

x	-1 $\qquad$ 11
$f'(x) = 3(x-1)(x+1)$	$-$
$f(x)$	$3 \searrow -1$

   $0 \in [-1; 3]$. f est continue sur $[-1; 1]$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1; 1]$.

2.

a	-1	0	0	0,25	0,25	0,3125
b	1	1	0,5	0,5	0,375	0,375
$b - a > 10^{-1}$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux
m	0	0,5	0,25	0,375	0,3125	
$f(a) \times f(m) < 0$	Faux	Vrai	Faux	Vrai	Faux	

3.

```python
def f(x):
    return x**3-3*x+1
def dichotomie(a, b, n):
    while b - a > 10**(-n):
        m = (a+b)/2
        if f(a) * f(m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return m
```

`dichotomie(-1, 1, 1)` renvoie 0.3125

2. Méthode de Newton

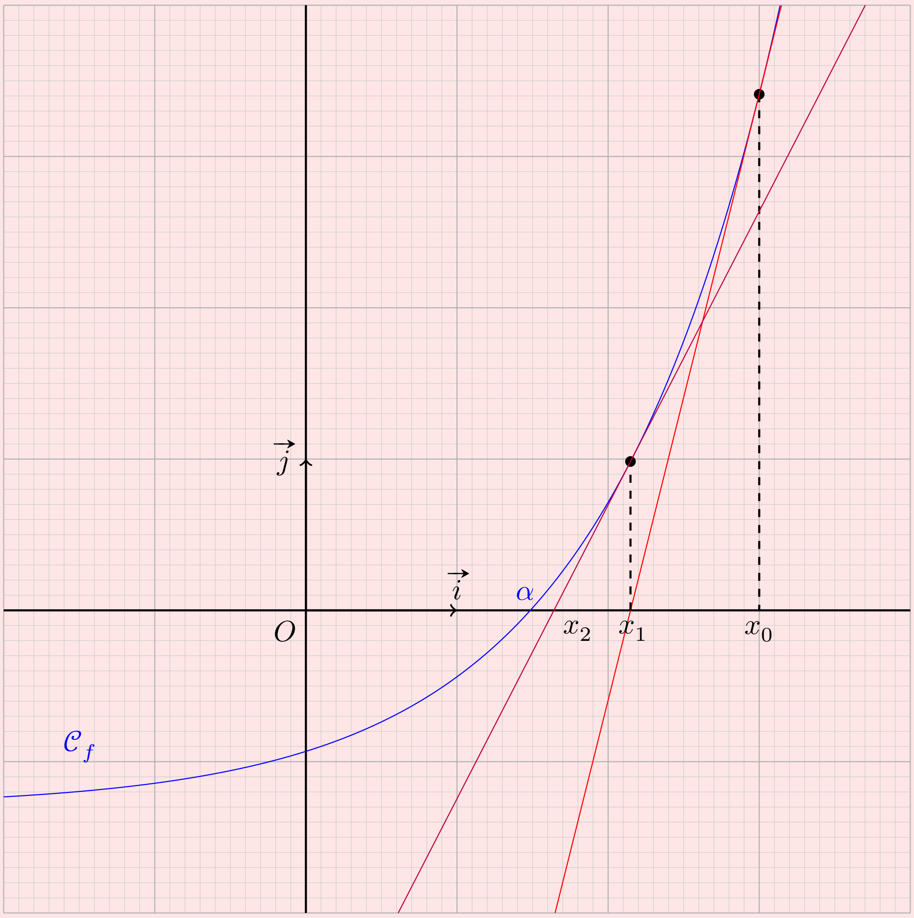
Principe

La méthode de Newton est un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction (d'une valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$).
On choisit une valeur approchée grossière x_0 du zéro de la fonction.
L'algorithme consiste à :

- A partir d'une valeur approchée x_n d'un zéro de la fonction, on trace la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0. Cette tangente coupe l'axe des abscisses en x_{n+1}.
- On réitère l'étape précédente autant de fois que nécessaire afin d'obtenir une valeur approchée plus proche que la précédente.

Remarque

L'équation réduite de la tangente au point d'abscisse x_n est $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$.
Cette tangente croise l'axe des abscisses en $x = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
On a donc $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.



Exemple

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$. On admettre que la fonction f est convexe (voir chapitre « Compléments sur la dérivation ») sur $[0;1]$, c'est-à-dire que sa courbe représentative est au-dessus de chacune de ses tangentes sur $[0;1]$.
On a vu dans l'exemple précédent que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1;1]$ et que f est décroissante sur $[-1;1]$. On a vu aussi que $\forall x \in]-1;1[, f'(x) < 0$
Dans l'algorithme de Newton, on choisit $x_0 = -0.5$. Soit (x_n) la suite des abscisses successif qui répondent à l'algorithme de Newton.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant \alpha$.
2. Démontrer que la suite (x_n) est croissante.
3. En déduire que la suite (x_n) converge.
4. Implémenter cet algorithme en Python. Donner la valeur de x_5.

Réponse

1. Posons $\mathcal{P}(n) : x_n \leqslant \alpha$.
   - Initialisation :
     $\alpha \in [-1;1]$ et $x_0 = -1$ donc $x_0 \leqslant \alpha$.
     $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
   - Hérédité :
     Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
     $\mathcal{P}(k)$ est vraie donc $x_k \leqslant \alpha$.
     L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en x_k est $y = f(x_k) + (x - x_k)f'(x_k)$
     La tangente étant en-dessous de $\mathcal{C}_f$, on a :
     $f(x_k) + (\alpha - x_k)f'(x_k) \leqslant f(\alpha) \iff f(x_k) + (\alpha - x_k)f'(x_k) \leqslant 0$
     $\iff (\alpha - x_k)f'(x_k) \leqslant -f(x_k) \iff \alpha - x_k \geqslant -\frac{f(x_k}{f'(x_k} \iff \alpha \geqslant x_k - \frac{f(x_k}{f'(x_k}$
     $\iff \alpha \geqslant x_{k+1} \iff x_{k+1} \leqslant \alpha$
   - Conclusion :
     $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant \alpha$.
2. $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \implies \forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
   Or $f'(x_n) \leqslant 0$ (car f est décroissante) donc $x_{n+1} - x_n$ est du signe de $f(x_n)$ or $x_n \leqslant \alpha$ donc $f(x_n) \geqslant f(\alpha) = 0$.
   Donc $x_{n+1} - x_n \geqslant 0$. Ainsi (x_n) est croissante.
3. La suite (x_n) est croissante et majorée par α donc converge vers une limite $\ell \leqslant \alpha$.
   De plus, $f(-1) = 3 \neq 0$ et $f(1) = -1 \neq 0$ donc $\alpha \in]-1;1[$ et donc $\ell \in]-1;\alpha]$ et donc $f'(\ell) \neq 0$
   Or $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
   Soit $\ell = \ell - \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \iff 0 = -\frac{f(\ell)}{f'(\ell)} \iff \frac{f(\ell)}{f'(\ell)} = 0 \iff f(\ell) = 0$
   Or α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[-1;1]$.
   Donc $\ell = \alpha$.
4.
```python
def f(x):
    return x**3-3*x+1
def derivee(x):
    return 3*x**2-3
def newton(x, n):
    for i in range(n):
        x=x-(f(x)/derivee(x))
    return x
```
   L'instruction `newton(-0.5, 5)` renvoie 0.3472963553338599.

3. Méthode de la sécante

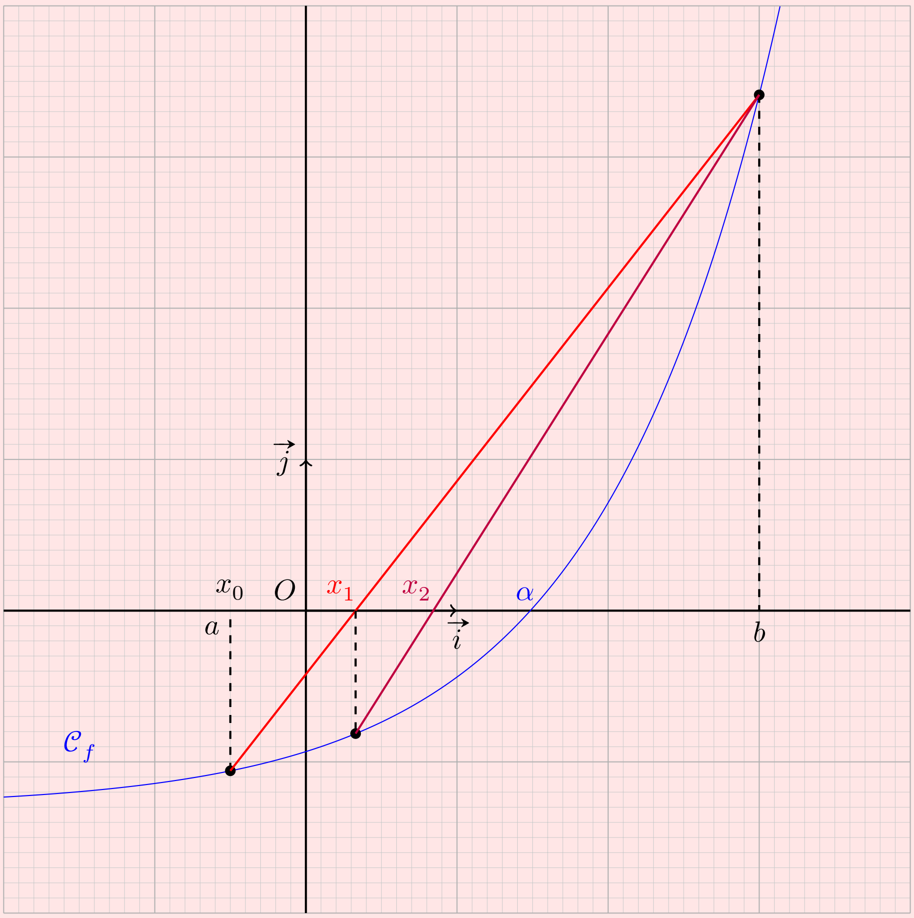
Principe

La méthode des sécantes est un algorithme de recherche d'un zéro d'une fonction (d'une valeur de x pour laquelle $f(x) = 0$).
On cherche un intervalle $[a; b]$ contenant le zéro cherché (et seulement ce zéro). L'algorithme consiste à :

- On pose $x_0 = a$ et $c = b$ si f est croissante ou $x_0 = b$ et $c = a$ si f est décroissante.
- x_1 est l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la droite reliant les points de coordonnées $(x_0; f(x_0))$ et $(c; f(c))$.
- On réitère l'étape précédente autant de fois que nécessaire afin d'obtenir une valeur approchée plus proche que la précédente.

Remarque

L'équation réduite de la sécante numéro n est $y = \frac{f(c)-f(x_n)}{c-x_n}(x - x_n) + f(x_n)$.
Cette sécante croise l'axe des abscisses en $x = x_n - \frac{f(x_n)(c-x_n)}{f(c)-f(x_n)}$.
On a donc $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(c-x_n)}{f(c)-f(x_n)}$



Exemple

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x + 1$.On admet que la fonction f est convexe (voir chapitre « Compléments sur la dérivation ») sur $[0;1]$, c'est-à-dire que sa courbe représentative est en-dessous de chacune de ses cordes sur $[0;1]$.
On a vu dans l'exemple précédent que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1;1]$.
Dans l'algorithme des sécantes, on choisit $a = 0$ et $b = 1$. Soit (x_n) la suite des abscisses successif qui répondent à l'algorithme des sécantes.

1. Démontrer que $\alpha \geqslant 0$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geqslant \alpha$.
3. Démontrer que lla suite (x_2) est décroissante.
4. En déduire que la suite (x_n) converge.
5. Implémenter cet algorithme en Python. Donner la valeur de x_5.

Réponse

1. On remarque que $f(0) = 1 \geqslant 0$ or f est décroissante donc $0 \leqslant \alpha$ ou encore $\alpha \in [0;1]$
2. Posons $\mathcal{P}(n) : x_n \geqslant \alpha$.
   - Initialisation :
     $\alpha \in [0;1]$ et $x_0 = 1$ donc $x_0 \leqslant \alpha$.
     $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
   - Hérédité :
     Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
     $\mathcal{P}(k)$ est vraie donc $x_k \geqslant \alpha$
     L'équation de la droite supportant la corde passant par les points $(a; f(a))$ et $(x_k; f(x_k))$ est $y = \frac{f(a)-f(x_k)}{a-x_k}(x - x_k) + f(x_k)$, c'est-à-dire $y = \frac{f(0)-f(x_k)}{0-x_k}(x - x_k) + f(x_k)$ soit encore $y = \frac{1-f(x_k)}{-x_k}(x - x_k) + f(x_k)$
     La corde étant au-dessus de $\mathcal{C}_f$, on a :
     $\forall x \in [a; x_k]$, $\frac{1-f(x_k)}{-x_k}(x - x_k) + f(x_k) \geqslant f(x)$
     En particulier, pour $x = \alpha$, on a :
     $\frac{1-f(x_k)}{-x_k}(\alpha - x_k) + f(x_k) \geqslant f(\alpha) \iff \frac{1-f(x_k)}{-x_k}(\alpha - x_k) + f(x_k) \geqslant 0$
     $\iff \frac{1-f(x_k)}{-x_k}(\alpha - x_k) \geqslant -f(x_k)$
     or $x_k \geqslant \alpha \geqslant a = 0$ et $f(x_k) \leqslant f(a)$ car f est décroissante donc $f(x_k) \leqslant 1$ ou encore $1 - f(x_k) \geqslant 0$
     Donc $\frac{1-f(x_k)}{-x_k}(\alpha - x_k) \geqslant -f(x_k) \iff \alpha - x_k \leqslant \frac{x_k f(x_k)}{1-f(x_k)} \iff \alpha \leqslant x_k + \frac{x_k f(x_k)}{1-f(x_k)}$
     $\iff \alpha \leqslant x_k - \frac{(0-x_k-f(x_k)}{(f(0)-f(x_k)} \iff \alpha \leqslant x_k - \frac{(c-x_k-f(x_k)}{(f(c)-f(x_k)} \iff \alpha \leqslant x_{k+1}$
     $\mathcal{P}(k+1)$ est donc vraie.
   - Conclusion :
     $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leqslant \alpha$.
3. $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a-x_n)}{f(a)-f(x_n)}$
   $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a-x_n)}{f(a)-f(x_n)} \iff x_{n+1} - x_n = -\frac{f(x_n)(a-x_n)}{f(a)-f(x_n)}$
   Or $x_n \geqslant \alpha$ donc $f(x_n) \leqslant f(\alpha)$ ou encore $f(x_n) \leqslant 0$
   $x_n \geqslant \alpha \geqslant a$ donc $f(x_n) \leqslant f(a)$ car f est décroissante et $a - x_n \leqslant 0$ et $f(a) - f(x_n) \geqslant 0$.
   Donc $-\frac{f(x_n)(a-x_n)}{f(a)-f(x_n)} \leqslant 0$. Donc $x_{n+1} - x_n \leqslant 0$. Ainsi (x_n) est décroissante.
4. La suite (x_n) est décroissante et minorée par α donc converge vers une limite $\ell \geqslant \alpha$.
   De plus, $f(0) = 1 \neq 0$ et $f(1) = -1 \neq 0$ donc $\alpha \in]0;1[$ et donc $\ell \in [\alpha;1[$
   Or $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(a-x_n)}{f(a)-f(x_n)}$.
   Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{x \to +\infty} x_n - \frac{f(x_n)(a-x_n)}{f(a)-f(x_n)}$
   Soit $\ell = \ell - \frac{f(\ell)(0-\ell)}{1-f(\ell)} \iff 0 = -\frac{f(\ell)(-\ell)}{1-f(\ell)} \iff 0 = f(\ell)\ell \iff f(\ell) = 0$ ou $\ell = 0$
   Or $\ell \neq 0$ car $\ell \in [\alpha;1[$ et $\alpha > 0$ donc $f(\ell) = 0$
   De plus, α est la seule solution de l'équation $f(x) = 0$ dans $[-1;1]$. Donc $\ell = \alpha$.

Exemple - suite

Réponse

5.
```python
def f(x):
    return x**3-3*x+1
def secantes(a, b, n):
    x=b
    for i in range(n):
        x=x-f(x)*(a-x)/(f(a)-f(x))
    return x
```
L'instruction `secante(0, 1, 5)` renvoie `0.34730625478031896`.

IV. Approfondissement

1. Démonstration par dichotomie du théorème des valeurs intermédiaires

Soit I un intervalle non vide. Soit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
Soit $(a, b) \in I^2, a < b$. Soit y_0 compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

- 1$^{\text{er}}$ cas : $f(a) = f(b)$
  on a donc $f(a) = f(b) = y_0$
  On peut choisir $x_0 = a$ ou $x_0 = b$, on aura $f(x_0) = y_0$.

- 2$^{\text{ème}}$ cas : $f(a) \neq f(b)$
  Supposons par exemple que $f(a) < f(b)$. (l'autre cas est traité de la même façon).
  Soit la fonction $g : \begin{array}{ll} [a, b] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x) - y_0 \end{array}$.
  f étant continue sur I, g est continue sur $[a, b]$.
  Si $y_0 = f(a)$, $x_0 = a$ convient.
  Si $y_0 = f(b)$, $x_0 = b$ convient.
  Supposons donc que $y_0 \in]f(a), f(b)[$.
  On a donc $g(a) = f(a) - y_0 < 0$ et $g(b) = f(b) - y_0 > 0$.
  Posons $a_0 = a$ et $b_0 = b$.
  Posons $I_0 = [a_0, b_0]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = [a_{n+1}, b_{n+1}] = \begin{cases} \left[a_n, \dfrac{a_n + b_n}{2}\right], \text{ si } g\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant 0 \\ \left[\dfrac{a_n + b_n}{2}, b_n\right], \text{ si } g\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < 0 \end{cases}$
  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant \frac{a_n + b_n}{2} \leqslant b_n$
  Donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} \geqslant a_n$ et $b_{n+1} \leqslant b_n$
  Ainsi $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} \subset I_n$
  De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$
  Donc la suite $(b_n - a_n)$ converge vers 0.
  Donc les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes donc convergent vers la même limite x_0.

Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : g(a_n) < 0$ et $g(b_n) \geqslant 0$.

- <u>Initialisation :</u>
  $g(a_0) = g(a) < 0$
  $g(b_0) = g(b) > 0 \geqslant 0$

- <u>Hérédité :</u> Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie
  $g(a_k) < 0$ et $g(b_k) \geqslant 0$
  Supposons que $g\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \geqslant 0$.
  On a donc $a_{k+1} = a_k$ donc $g(a_{k+1}) = g(a_k) < 0$ et $b_{k+1} = \frac{a_k + b_k}{2}$ donc $g(b_{k+1}) = g\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) \geqslant 0$.
  Supposons que $g\left(\frac{a_k + b_k}{2}\right) < 0$

On a donc $a_{k+1} = \frac{a_k+b_k}{2}$ donc $g(a_{k+1}) = g\left(\frac{a_k+b_k}{2}\right) < 0$ et $b_{k+1} = b_k$ donc $g(b_{k+1}) = g(b_k) \geqslant 0$.
Ainsi $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

- Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : g(a_n) < 0$ et $g(b_n) \geqslant 0$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(a_n) \leqslant 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(b_n) \geqslant 0$
Or g est continue en x_0 donc $\lim\limits_{n\to+\infty} g(a_n) = g(x_0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} g(b_n) = g(x_0)$
D'où $g(x_0) = 0$
Et donc $f(x_0) = y_0$. Donc $\exists x_0 \in [a,b], f(x_0) = y_0$
Donc $\forall (a,b) \in I^2, a < b, \forall y_0$ compris entre $f(a)$ et $f(b), \exists x_0 \in [a,b], y_0 = f(x_0)$

2. Fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y

Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y.
On remarque de suite que $f(0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$ donc $0 = 2f(0) - f(0) = f(0)$.
$f(0) = 0$
On admettra que pour tout réel x, il existe une suite (x_n) de rationnels convergente de limite x. *On dit que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.*

- Cas particulier des entiers naturels : $f(1) = f(0+1) = f(0) + f(1) = 0 + f(1) = f(1)$.
  $f(2) = f(1+1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$.
  Démontrons donc par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : f(n) = nf(1)$
  - Initialisation :
    $f(0) = 0 = 0f(1)$
    Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
  - Hérédité : Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie
    $\mathcal{P}(k)$ est vraie donc $f(k) = kf(1)$
    $f(k+1) = f(k) + f(1) = kf(1) + f(1) = (k+1)f(1)$
    Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  - Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) : f(n) = nf(1)$
- Cas particulier des entiers négatifs : Soit n un entier négatif. $-n$ est donc un entier positif.
  On a donc $f(-n) = -nf(1)$
  Or $0 = f(0) = f(n + (-n)) = f(n) + f(-n)$ alors $f(n) = -f(-n) = -(-nf(1)) = nf(1)$
  Donc pour tout entier négatif, $f(n) = nf(1)$.
- Cas particulier des relatifs : Soit $x \in \mathbb{Q}$. $\exists p \in \mathbb{Z}, \exists q \in \mathbb{N}^*, x = \frac{p}{q}$
  $x = \frac{p}{q} \iff p = qx$
  De la même manière que pour les entiers naturels, on peut démontrer par récurrence que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall q \in \mathbb{N}^*, f(qx) = qf(x)$
  On a donc $f(p) = f(qx) = qf(x)$ et donc $f(x) = \frac{f(p)}{q} = \frac{pf(1)}{q} = \frac{p}{q}f(1) = xf(1)$
  Ainsi $\forall x \in \mathbb{Q}, f(x) = xf(1)$.
- Cas général des réels :
  Soit $x \in \mathbb{R}$. Il existe une suite (x_n) de rationnels convergente de limite x.
  $\forall n \in \mathbb{N}, f(x_n) = x_n f(1)$.
  La fonction f étant continue, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(x)$.
  Donc $f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x_n) = \lim\limits_{x\to+\infty} x_n f(1) = xf(1)$
  Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = xf(1)$

3. Prolongement par continuité

Propriété - prolongement par continuité

Soit I un intervalle non réduit à un point. Soient $a \in I$ et $f : I \backslash \{a\} \to \mathbb{R}$.
Il existe une fonction $\widetilde{f}$ continue en a prolongeant f sur I si et seulement si f admet une limite finie en a.
Dans ce cas, un tel prolongement est unique et $\widetilde{f}(a) = \lim\limits_{a} f$.
On l'appelle prolongement par continuité de f en a.
Si de plus, f est continue sur $I \cap]-\infty; a[$ et sur $I \cap]a; +\infty[$ alors $\widetilde{f}$ est continue sur I

Exemple

Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$.

1. Donner l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Développer l'expression $(x-1)(x^2+x+1)$.
3. Démontrer que f admet un prolongement par continuité en 1 que l'on appellera $\widetilde{f}$.
4. Démontrer que $\widetilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse

1. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \backslash \{1\}$ car 1 est une valeur interdite.
2. $(x-1)(x^2+x+1) = x^3+x^2+x-x^2-x-1 = x^3-1$.
3. $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} \frac{x^3-1}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = \lim\limits_{x \to 1} x^2+x+1 = 3$
4. On a : $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ 3 & \text{si } x = 1 \end{cases}$
   La fonction f est un quotient de polynômes.
   Or tout polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ donc f est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition donc sur $]-\infty; 1[$ et sur $]$–$1; +\infty[$.
   $\widetilde{f}$ est un prolongement par continuité de f en 1 donc $\widetilde{f}$ est continue en 1.
   Ainsi $\widetilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.