Chapitre VII - Complément sur la dérivation

Rémi Caneri

Table des matières

I. Composée de deux fonctions

Définition

Soient I et J deux intervalles.
Soit u une fonction définie sur I telle que $\forall x \in I, u(x) \in J$.
Soit v une fonction définie sur J.
Alors la fonction composée de v par u, notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$.

Exemple

Soit $v : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto 1 + x^2 \end{array}$.
Soit $u : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto \sqrt{x} \end{array}$.
Déterminer l'expression de $v \circ u(x)$ puis l'expression de $u \circ v(x)$.

Réponse

u est définie sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.
v est définie sur $\mathbb{R}_+$.
Donc $v \circ u$ est définie sur $\mathbb{R}_+$.
$v \circ u(x) = 1 + (u(x))^2 = 1 + \sqrt{x}^2 = 1 + x$
De même, $u \circ v$ est définie sur $\mathbb{R}$.
$u \circ v(x) = \sqrt{v(x)} = \sqrt{1 + x^2}$

Théorème - admis

Soient a, b et c trois nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} v(X) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = c$

Exemple

Déterminer $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \sqrt{\frac{1}{x-2}}$.

Réponse

$\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} x - 2 = 0^+$
$\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{X} = +\infty$
Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty$
Or $\lim\limits_{\substack{X \to +\infty \\ x > 2}} \sqrt{X} = +\infty$
Donc $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x > 2}} \sqrt{\frac{1}{x-2}} = +\infty$

Théorème

Soient I et J deux intervalles.
Soit u une fonction définie sur I et dérivable en $a \in I$, telle que $\forall x \in I, u(x) \in J$.
Soit v une fonction définie sur J et dérivable en $b = u(a) \in J$.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable en a et $(v \circ u)'(a) = u'(a) \times (v' \circ u)(a) = u'(a) \times v'(u(a))$.

Démonstration

Soient I et J deux intervalles.
Soit $a \in I$.
Soient $u : I \to \mathbb{R}$ dérivable en a et $v : J \to \mathbb{R}$ dérivable en $b = u(a)$ deux fonctions telles que $u(I) \subset J$.
$\forall x \in I \backslash \{a\}, \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(a)}{x-a} = \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{x-a} = \frac{v(y)-v(b)}{x-a}$ en posant $y = u(x)$
donc $\forall x \in I \backslash \{a\}, \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(a)}{x-a} = \frac{v(y)-v(b)}{y-b} \frac{y-b}{x-a} = \frac{v(y)-v(b)}{y-b} \frac{u(x)-u(a)}{x-a}$
u étant dérivable en a, elle est continue en a. Donc $\lim\limits_{x \to a} u(x) = u(a)$. Soit encore $\lim\limits_{x \to a} y = b$.
On a donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(a)}{x-a} = \lim\limits_{y \to b} \frac{v(y)-v(b)}{y-b} \times \lim\limits_{x \to a} \frac{u(x)-u(a)}{x-a}$ par composition des limites.
Donc $\lim\limits_{x \to a} \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(a)}{x-a} = v'(b) \times u'(a) \in \mathbb{R}$ car v est dérivable en b et u en a.
Donc $v \circ u$ est dérivable en a et $(v \circ u)'(a) = u'(a)v'(b) = u'(a)v'(u(a)) = u'(a) \times (v' \circ u)(a)$.

Théorème

Soient I et J deux intervalles.
Soit u une fonction dérivable sur I, telle que $\forall x \in I, u(x) \in J$.
Soit v une fonction dérivable sur J.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et $\forall x \in I, (v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

Démonstration

Conséquence directe du théorème précédent.

Exemple

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.

1. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de $f'(x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
3. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ et de variation de f.

Réponse

1. En posant $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) = x^2 + 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, v(x) = e^x$, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = v \circ u(x)$.
   Or u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = 2x$
   De plus, v est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\forall X \in \mathbb{R}, v'(X) = e^X$.
   Donc $v \circ u$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 2xe^{x^2+1}$

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 + 1 = +\infty$
   $\lim\limits_{X\to+\infty} v(X) = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = +\infty$
   Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} v \circ u(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} u(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 + 1 = +\infty$
   $\lim\limits_{X\to+\infty} v(X) = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = +\infty$
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} v \circ u(x) = +\infty$

   $\lim\limits_{x\to 0} u(x) = \lim\limits_{x\to 0} x^2 + 1 = 1$
   $\lim\limits_{X\to 1} v(X) = \lim\limits_{X\to 1} e^X = e$
   Donc $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} v \circ u(x) = e$

3.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$2x$		$-$	0	$+$	
e^{x^2+1}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

II. Convexité sur un intervalle

1. Généralité

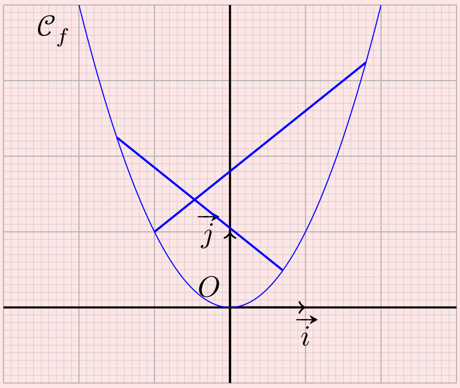
Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soient A et B deux points de $\mathcal{C}_f$.
Le segment $[AB]$ est appelé corde de la courbe $\mathcal{C}_f$.

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
La fonction f est convexe sur l'intervalle I si $\mathcal{C}_f$ est située en-dessous de chacune de ses cordes.

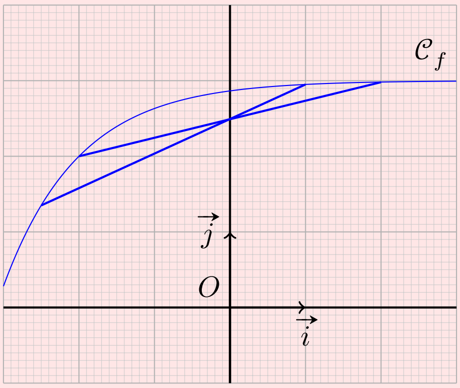
Interprétation graphique



Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
La fonction f est concave sur l'intervalle I si $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de chacune de ses cordes.

Interprétation graphique



Théorème - admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I.
La fonction f est convexe si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

Démonstration

Voir dans la partie approfondissement/Inégalité de Jensen.

Théorème - admis

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est concave si et seulement si f' est décroissante sur I.
La fonction f est concave si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est située en-dessous de chacune de ses tangentes.

Démonstration

Analogue au théorème précédent.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x + x$.
Étudier la convexité de f sur $]-\infty;0]$ et sur $[0;+\infty[$.

Réponse

La fonction esxponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x$ l'est aussi.
Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x + 1$.
Soit x et y deux réels tels que $x \leqslant y$
La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, on a :
$e^x \leqslant e^y \iff 1 + e^x \leqslant 1 + e^y \iff f'(x) \leqslant f'(y)$
Donc pour tous réels x et y tels que $x \leqslant y$, $f'(x) \leqslant f'(y)$.
Ainsi f' est croissante.

Donc f est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.

2. Dérivée seconde

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Si sa dérivée f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable.
La dérivée de f' est notée f'' et est appelée dérivée seconde de f.

Théorème

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est convexe sur I si et seulement si $\forall x \in I, f''(x) \geqslant 0$
La fonction f est concave sur I si et seulement si $\forall x \in I, f''(x) \leqslant 0$

Démonstration - à connaître

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante sur $I \iff \forall x \in I, f''(x) \geqslant 0$
La fonction f est concave sur $I \iff f'$ est décroissante sur $I \iff \forall x \in I, f''(x) \leqslant 0$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 1$.
Étudier la convexité de f sur $]-\infty; 0]$ et sur $[0; +\infty[$.

Réponse

La fonction cube est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3x^2$.
La fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = 3 \times 2x = 6x$.
On a donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x) = 6x$		$-$	0	$+$	

Donc f est concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$.

Remarque

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
$\forall x \in I, f''(x) \geqslant 0 \iff$ la fonction f est convexe sur $I \iff$ la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.

3. Point d'inflexion

Définition

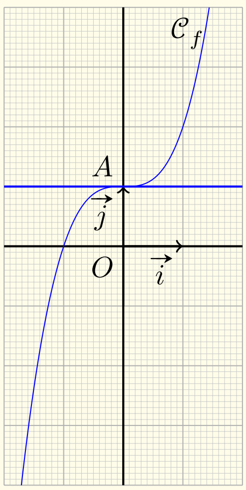
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
Soit $A \in \mathcal{C}_f$.
Le point A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A traverse $\mathcal{C}_f$.

Remarque

Si $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ alors sa tangente en A est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ d'un côté de A et en-dessous de $\mathcal{C}_f$ de l'autre côté.
Autrement dit, A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si f change de convexité en a. Autrement dit, si f est deux fois dérivable, A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si f'' change de signe en a.

Exemple

On a vu dans un exemple précédent que la fonction f changeait de convexité en 0.
Donc le point $A(0; 0^3 + 1)$, c'est-à-dire $A(0; 1)$, est un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction cube.



4. Inégalités

Propriété

Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.

$$\forall a \in I, \forall b \in I, \forall t \in [0;1], f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$$

Démonstration

Soient a et b deux réels de l'intervalle I.
Supposons $a=b$ Soit $t \in [0;1]$
$f(ta+(1-t)b) = f(ta+(1-t)a) = f(ta+a-ta) = f(a)$ et $tf(a)+(1-t)f(b) = tf(a)+(1-t)f(a) = tf(a)+f(a)-tf(a) = f(a)$.
On a bien $f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$.

Supposons maintenant que $a \neq b$.
Quitte à échanger a et b, nous prendrons a et b tels que $a<b$, soit $a-b<0$.

Soit $t \in [0;1]$
Démontrons que $ta+(1-t)b \in [a;b]$.
$ta+(1-t)b = ta+b-tb = b+(a-b)t$
$0 \leqslant t \leqslant 1 \iff 0 \geqslant (a-b)t \geqslant a-b \iff b+0 \geqslant b+(a-b)t \geqslant b+a-b \iff b \geqslant b+(a-b)t \geqslant a$
Donc $ta+(1-t)b \in [a;b]$.

Soit $A(a;f(a))$ et $B(b;f(b))$. L'équation de la corde $[AB]$ est $y = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)+f(a)$ sur l'intervalle $[a;b]$. La fonction f étant convexe sur I, elle est en-dessous de chacune de ses cordes et donc en particulier, la corde d'extrémités A et B.

Donc $f(ta+(1-t)b) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+(1-t)b-a)+f(a)$
$f(ta+(1-t)b) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(ta+(1-t)b-a)+f(a) \iff f(ta+(1-t)b) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}((t-1)a+(1-t)b)+f(a)$
$\iff f(ta+(1-t)b) \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a}((1-t)(b-a))+f(a) \iff f(ta+(1-t)b) \leqslant (1-t)(f(b)-f(a))+f(a)$
$\iff f(ta+(1-t)b) \leqslant f(b)-f(a)-tf(b)+tf(a)+f(a) \iff f(ta+(1-t)b) \leqslant f(b)-tf(b)+tf(a)$
$\iff f(ta+(1-t)b) \leqslant (1-t)f(b)+tf(a)$

Ainsi $\forall t \in [0;1], f(ta+(1-t)b) \leqslant (1-t)f(b)+tf(a)$
Et donc $\forall a \in I, \forall b \in I, \forall t \in [0;1], f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$

Exemple

1. Démontrer que pour tous réels x et y, $e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{e^x+e^y}{2}$
2. Démontrer que pour tout réel x, $e^x \geqslant 1+x$

Réponse

1. La fonction exponentielle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $exp''(x) = e^x \geqslant 0$
   Donc la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.
   Donc $\forall x \in I, \forall x \in I, \forall t \in [0;1], exp(tx+(1-t)y) \leqslant texp(x)+(1-t)exp(y)$
   En particulier, pour $t=\frac{1}{2}$, on a :
   $\forall x \in I, \forall x \in I, exp\left(\frac{1}{2}x+\left(1-\frac{1}{2}\right)y\right) \leqslant \frac{1}{2}exp(x)+\left(1-\frac{1}{2}\right)exp(y)$
   $\forall x \in I, \forall x \in I, exp\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y\right) \leqslant \frac{1}{2}exp(x)+\frac{1}{2}exp(y)$
   $\forall x \in I, \forall x \in I, exp\left(\frac{1}{2}(x+y)\right) \leqslant \frac{1}{2}(exp(x)+exp(y))$
   $\forall x \in I, \forall x \in I, e^{\frac{x+y}{2}} \leqslant \frac{exp(x)+exp(y)}{2}$
2. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{5}$ donc l'équation de la tangente à sa courbe représentative au point d'abscisse 0 est $y = exp'(0)(x-0)+exp(0)$, c'est-à-dire $y = exp(0) \times x + 1$ ou encore $y = x+1$.
   f étant convexe sur $\mathbb{R}$, sa courbe représentative est située au dessus de chacune de ses tangente et donc au-dessus de sa tangente au point d'abscisse 0.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) \geqslant 1+x$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1+x$

III. Approfondissement

1. Dérivée n-ième d'une fonction

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On définit, sous réserve d'existence, les dérivées successives de f par :

- $f^{(0)} = f$
- $\forall n \in \mathbb{N}, f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)'$

$f^{(n)}$ est appelée dérivée n-ième de f.

Remarque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
Si elles existent, on a :

- $f^{(1)} = f'$
- $f^{(2)} = f''$

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit $n \in \mathbb{N}$
On dit que f est de classe $\mathcal{C}^n$ sur I si elle est n fois dérivable sur I et si la fonction $f^{(n)}$ est continue sur I.
On peut noter $f \in \mathcal{C}^n(I)$.

Remarque

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- $f \in \mathcal{C}^0(I) \iff f$ est continue sur I
- $f \in \mathcal{C}^\infty(I) \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, f \in \mathcal{C}^n(I)$

Propriété - Formule de Leibniz

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I.
Alors la fonction fg est n fois dérivable et

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soient f et g deux fonctions n fois dérivables sur un intervalle I.
Démontrons par récurrence la proposition $\forall q \in [\![0;n]\!], \mathcal{P}(q)$: fg est q fois dérivable et $(fg)^{(q)} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} f^{(k)} g^{(q-k)}$

- Initialisation :
  f et g étant n fois dérivable, on peut la dériver 0 fois.
  $(fg)^{(0)} = fg = 1 f^{(0)} g^{(0)} = \binom{0}{0} f^{(0)} g^{(0-0)} = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(0)} g^{(0-k)}$
  Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

- Hérédité :
  Supposons qu'il existe $r \in [\![0;n-1]\!]$ tel que $\mathcal{P}(r)$ soit vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(r+1)$ est vraie.
  $\mathcal{P}(r)$ est vraie donc fg est r fois dérivable et $(fg)^{(r)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r-k)}$ f et g étant n fois dérivables sur I, $\forall k \in [\![0;r]\!], f^{(k)}$ et $g^{(r-k)}$ sont dérivables car $k \leqslant r \leqslant n-1$ et $r-k \leqslant r-0 \leqslant r \leqslant n-1$.
  Donc $(fg)^{(r)}$ est encore dérivable comme somme de fonctions dérivables.
  (fg) est donc $r+1$ fois dérivable.
  $(fg)^{(r+1)} = \left((fg)^{(r)}\right)' = \left(\sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r-k)}\right)' = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(f^{(k)} g^{(r-k)}\right)'$
  $(fg)^{(r+1)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} \left(\left(f^{(k)}\right)' g^{(r-k)} + f^{(k)} \left(g^{(r-k)}\right)\right) = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k+1)} g^{(r-k)} + \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r+1-k)}$
  $(fg)^{(r+1)} = \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k+1)} g^{(r-k)} + \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r+1-k)}$
  $(fg)^{(r+1)} = \sum_{\ell=1}^{r+1} \binom{r}{\ell-1} f^{(\ell)} g^{(r-(\ell-1))} + \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r+1-k)}$
  $(fg)^{(r+1)} = \sum_{k=1}^{r+1} \binom{r}{k-1} f^{(k)} g^{(r+1-k)} + \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r+1-k)}$
  $(fg)^{(r+1)} = \binom{r}{r+1-1} f^{(r+1)} g^{(r-(r+1)+1)} + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k-1} f^{(k)} g^{(r-k+1)} + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r+1-k)} + \binom{r}{0} f^{(0)} g^{(r+1-0)}$
  $(fg)^{(r+1)} = \binom{r}{r} f^{(r+1)} g^{(0)} + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k-1} f^{(k)} g^{(r+1-k)} + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)} g^{(r+1-k)} + 1 f^{(0)} g^{(r+1)}$

Démonstration - suite

$(fg)^{(r+1)} = 1f^{(r+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k-1} f^{(k)}g^{(r+1-k)} + \sum_{k=1}^{r} \binom{r}{k} f^{(k)}g^{(r+1-k)} + 1f^{(0)}g^{(r+1)}$

$(fg)^{(r+1)} = \binom{r}{r} f^{(r+1)}g^{(0)} + \sum_{k=1}^{r} \left(\binom{r}{k-1} + \binom{r}{k}\right) f^{(k)}g^{(r+1-k)} + 1f^{(0)}g^{(r+1)}$

$(fg)^{(r+1)} = \binom{r+1}{r+1} f^{(r+1)}g^{(r+1-(r+1))} + \sum_{k=1}^{r} \binom{r+1}{k} f^{(k)}g^{(r+1-k)} + \binom{r+1}{0} f^{(0)}g^{(r+1-0)}$

$(fg)^{(r+1)} = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} f^{(k)}g^{(r+1-k)}$

- <u>Conclusion :</u>

  $\forall q \in [\![0;n]\!], \mathcal{P}(q)$: fg est q fois dérivable et $(fg)^{(q)} = \sum_{k=0}^{q} \binom{q}{k} f^{(k)}g^{(q-k)}$

2. Inégalité arithmético-géométrique

Définition

Soit x un nombre réel strictement positif.
Le nombre $\sqrt[n]{x}$ est le nombre réel strictement positif y tel que $y^n = x$.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ n nombres réels strictement positifs.
La moyenne géométrique de ces nombres est inférieure à la moyenne arithmétique de ces mêmes nombres.

$$\sqrt[n]{x_1x_2...x_n} \leqslant \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$.
Soit $x_1, x_2, ..., x_n$ n nombres réels strictement positifs.
Posons $A = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ et $G = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k}$.
Donc $nA = \sum_{k=1}^{n} x_k$ et $G^n = \prod_{k=1}^{n} x_k$
De plus, la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^n$ est dérivable.
On a :$\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) = nx^{n-1} \geqslant 0$.
Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+, \forall y \in \mathbb{R}_+, x \leqslant y \iff x^n \leqslant y^n$.

On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant 1 + x$
Donc $\forall k \in [\![1;n]\!], e^{\frac{x_k}{A}-1} \geqslant 1 + \frac{x_k}{A} - 1$
$\forall k \in [\![1;n]\!], e^{\frac{x_k}{A}-1} \geqslant \frac{x_k}{A}$

Démonstration - suite

Et donc $\prod_{k=1}^{n} \frac{x_k}{A} \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{x_k}{A}-1}$
$\frac{\prod_{k=1}^{n} x_k}{A^n} \leqslant \prod_{k=1}^{n} e^{\frac{x_k}{A}-1}$
$\frac{G^n}{A^n} \leqslant e^{\sum_{k=1}^{n}(\frac{x_k}{A}-1)}$
$\frac{G^n}{A^n} \leqslant e^{\frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{A}-n}$
$\frac{G^n}{A^n} \leqslant e^{\frac{nA}{A}-n}$
$\frac{G^n}{A^n} \leqslant e^{n-n}$
$\frac{G^n}{A^n} \leqslant e^{0}$
$\frac{G^n}{A^n} \leqslant 1$
$G^n \leqslant A^n$
$G \leqslant A$ car la fonction $x \mapsto x^n$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$

On a bien $\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \leqslant \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k}{n}$

3. Inégalité de Jensen

Propriété

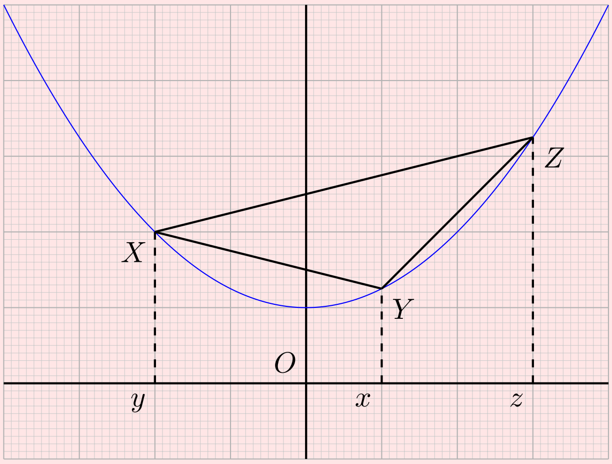
f est une fonction convexe sur $I \iff \left(\forall (x,y,z) \in I^3, x<y<z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}\right)$

Démonstration

- Soit f une fonction convexe sur I.
  Soit $(x,y,z) \in I^3, x<y<z$
  $y \in [x,z]$ donc $y = (1-t)x + tz$ avec $t = \frac{y-x}{z-x} \notin \{0,1\}$
  Donc $f(y) = f((1-t)x+tz) < (1-t)f(x) + tf(z) \implies f(y)-f(x) < t(f(z)-f(x))$
  $\implies f(y)-f(x) < \frac{y-x}{z-x}(f(z)-f(x)) \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x}$
  De plus, $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}\frac{z-y}{z-x} + \frac{f(y)-f(x)}{y-x}\frac{y-x}{z-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}\left(\frac{z-y}{z-x} + \frac{y-x}{z-x}\right)$
  $\frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}\frac{z-x}{z-x} = \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
  On a bien $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
  Donc $\forall (x,y,z) \in I^3, x<y<z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$

- Supposons que $\forall (x,y,z) \in I^3, x<y<z \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
  Soit $(x,y,z) \in I^3$ tels que $x<y<z$. On a donc $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x} < \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$
  $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \implies f(y)-f(x) \leqslant \frac{y-x}{z-x}(f(z)-f(x)) \implies f(y) \leqslant f(x) + t(f(z)-f(x))$ avec $t = \frac{y-x}{z-x}$
  On a donc $f(y) \leqslant (1-t)f(x) + f(z)$
  Or $(1-t)x + tz = (1 - \frac{y-x}{z-x})x + \frac{y-x}{z-x}z = \frac{z-y}{z-x}x + \frac{y-x}{z-x}z = \frac{zx-yx+zy-zx}{z-x} = \frac{y(z-x)}{z-x} = y$
  D'où $f((1-t)x+tz) \leqslant (1-t)f(x) + f(z)$
  $\forall (x,y,z) \in I^3, x<y<z \implies f((1-t)x+tz) \leqslant (1-t)f(x) + f(z)$
  La fonction f est donc convexe sur I.

Interprétation graphique



Les pentes des droites (XY), (XZ) et (YZ) sont dans l'ordre croissant.

On peut donc démontrer les théorèmes admis :

Démonstration

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

$(1) \implies (2)$
Soit $(x, y) \in I^2, x < y$.
Soit $a \in]x, y[$.
On a $\frac{f(a)-f(x)}{a-x} < \frac{f(y)-f(x)}{y-x} < \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$
par passage à la limite, on a :
$\lim\limits_{a \to x} \frac{f(a)-f(x)}{a-x} \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ et $\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \lim\limits_{a \to x} \frac{f(y)-f(a)}{y-a}$
Soit $f'(x) \leqslant \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant f'(y)$
Donc $\forall (x, y) \in I^2, x < y \implies f'(x) \leqslant f'(y)$
Ainsi f' est croissante.

$(2) \implies (1)$
f' est croissante sur I.
Soit $(x, y) \in I^2, x < y$.
Soit $t \in]0, 1[$.
Posons $z = (1-t)x + ty$. On a donc $z - x = t(y - x)$ et $y - z = (1-t)(y - x)$
D'après le théorème des accroissements finis, $\exists (c, d) \in]x, z[\times]z, y[$ tels que :
$\frac{f(z)-f(x)}{z-x} = f'(c)$ et $\frac{f(y)-f(z)}{y-z} = f'(d)$
Or $x < c < z < d < y$ et f' est croissante donc $f'(c) < f'(d)$
Soit encore $\frac{f(z)}{-} f(x) z - x < \frac{f(y)}{-} f(z) y - z$
$\frac{f(z)-f(x)}{t(y-x)} < \frac{f(y)-f(z)}{(1-t)(y-x)} \iff \frac{f(z)-f(x)}{t} < \frac{f(y)}{-} f(z)(1-t)$ car $y > x$
D'où $(1-t)(f(z) - f(x)) < t(f(y) - f(z)) \implies f(z) - tf(z) - (1-t)f(x) < tf(y) - tf(z)$
$\implies f(z) < (1-t)f(x) + tf(y) \implies f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$
Donc $\forall (x, y) \in I^2, x < y, f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y)$
Donc f est convexe sur I.
Ainsi f est convexe sur $I \iff f'$ est croissante.

Démonstration - suite

Soit f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I.
Soit $a \in I$.
Posons $\tau_a : \begin{array}{l} I\backslash\{a\} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}$.

f est convexe donc :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x<y<a \implies \frac{f(a)-f(x)}{a-x} < \frac{f(a)-f(y)}{a-y} \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \implies \tau_a(x) < \tau_a(y)$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x<a<y \implies \frac{f(a)-f(x)}{a-x} < \frac{f(a)-f(y)}{a-y} \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \implies \tau_a(x) < \tau_a(y)$
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, a<x<y \implies \frac{f(a)-f(x)}{a-x} < \frac{f(a)-f(y)}{a-y} \implies \frac{f(x)-f(a)}{x-a} < \frac{f(y)-f(a)}{y-a} \implies \tau_a(x) < \tau_a(y)$
Donc $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x<y \implies \tau_a(x) < \tau_a(y)$

τ_a est donc croissante sur $I\backslash\{a\}$ et $\lim\limits_{x\to a} \tau_a(x) = f'(a)$ car f est dérivable sur I.

Donc $\forall x \in I, \begin{cases} x<a \implies \tau_a(x) \leqslant f'(a) \\ x>a \implies \tau_a(x) \geqslant f'(a) \end{cases}$

$\forall x \in I, \begin{cases} x<a \implies \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant f'(a) \\ x>a \implies \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant f'(a) \end{cases}$

$\forall x \in I, \begin{cases} x<a \implies f(x)-f(a) \geqslant (x-a)f'(a) \\ x>a \implies f(x)-f(a) \geqslant (x-a)f'(a) \end{cases}$

$\forall x \in I, \begin{cases} x<a \implies f(x) \geqslant f(a)+(x-a)f'(a) \\ x>a \implies f(x) \geqslant f(a)+(x-a)f'(a) \end{cases}$

Donc $\forall x \in I, f(x) \geqslant f(a)+(x-a)f'(a)$
Or l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en a est $y = f'(a)(x-a)+f(a)$
Donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse a.

Ainsi $\forall a \in I$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de sa tangente au point d'abscisse a.
$\mathcal{C}_f$ est donc au-dessus de chacune de ses tangentes.