Chapitre VIII - Orthogonalité et distances dans l'espace

Rémi Caneri

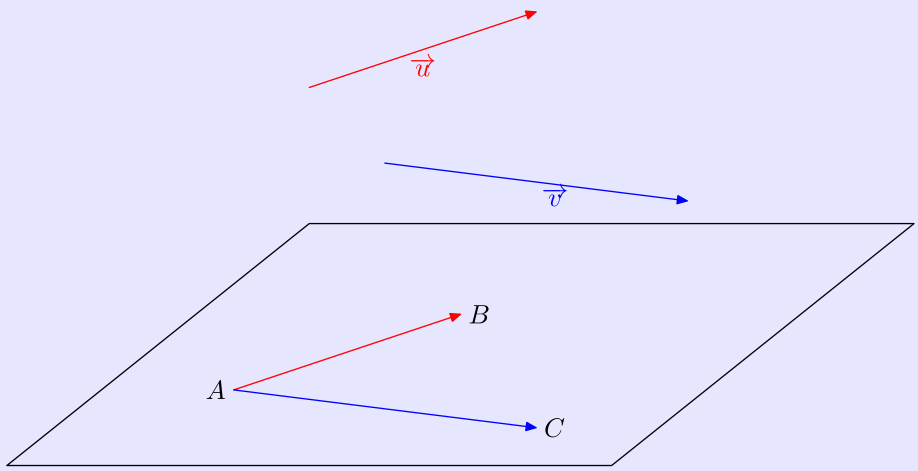
Table des matières

I. Produit scalaire

1. Généralités sur le produit scalaire

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
Soient A, B et C trois points de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soit des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.



Remarque

Dans la définition précédente, les points A, B et C dans le plan (ABC).
Donc les propriétés du produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que dans le plan.
On a donc, comme vu en première :

- $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
- En appelant H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), on a $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Soit $k \in \mathbb{R}$.

- $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
- $\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
- $k(\vec{u}.\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v})$

Démonstration

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Soit $k \in \mathbb{R}$. Soient A, B, C et D quatre points de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ soit des représentants des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- $\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs colinéaires donc $\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|\|\vec{u}\|\cos(\widehat{\vec{u},\vec{u}}) = \|\vec{u}\|^2 \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2 \times 1 = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB} = \vec{v}.\vec{u}$
- Démonstration en II.2.
- $k(\vec{u}.\vec{v}) = k(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = (k\overrightarrow{AB}).\overrightarrow{AC} = (k\vec{u}).\vec{v}$
  $k(\vec{u}.\vec{v}) = k(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB}.(k\overrightarrow{AC}) = \vec{u}.(k\vec{v})$

Propriété - identités remarquables

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$$

Démonstration

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.
$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u}+\vec{u}.\vec{v}+\vec{v}.\vec{u}+\vec{v}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2+\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}.\vec{v}+\|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}+(-\vec{v})\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.(-\vec{v}) + \|-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + (-\vec{v}).(-\vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + (-1)\times(-1)\vec{v}.\vec{v}$
$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$(\vec{u}-\vec{v})(\vec{u}+\vec{v}) = \vec{u}.\vec{u} + \vec{u}.\vec{v} - \vec{v}.\vec{u} + \vec{v}.\vec{v} = \|\vec{u}\|^2 + \vec{u}.\vec{v} - \vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

Propriété - formules de polarisation

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

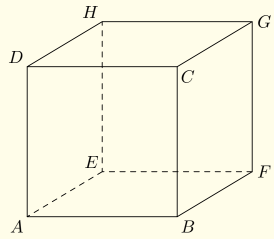
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2\right)$$

Démonstration

Découle directement de la propriété précédente.

Exemple

$ABCDEFGH$ est une cube dont l'arête mesure 1 unité.



1. Déterminer les longueur AH.
2. En déduire $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF}$

Réponse

1. Dans le triangle AEH rectangle isocèle en E, on a, d'après le théorème de Pythagore : $AH^2 = AE^2 + EH^2 = 1^2 + 1^2 = 1 + 1 = 2$
   Donc $AH = \sqrt{2}$
2. $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AH}\|^2 + \|\overrightarrow{BF}\|^2 - \|\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{BF}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}^2 + 1^2 - \|\overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AE}\|^2\right)$
   $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BF} = \frac{1}{2}\left(2 + 1 - \|\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{EA}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(3 - \|\overrightarrow{EH}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(3 - 1^2\right) = 1$

2. Orthogonalité

a. Généralités

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.
On peut noter $\vec{u} \perp \vec{v}$.

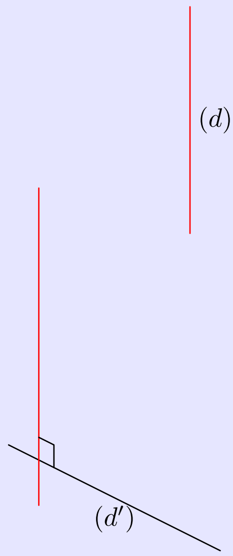
Remarque

Le vecteur $\vec{0}$ est donc orthogonal à tout autre vecteur.

b. Orthogonalité de deux droites

Définition

Deux droites (d) et (d') de l'espace sont orthogonales s'il existe une droite parallèle à (d) qui est perpendiculaire à (d').



Propriété

Soient (d) et (d') deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Les droites (d) et (d') sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Démonstration

Soient (d) et (d') deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
(d) et (d') sont orthogonales $\iff$ il existe une droite (d'') parallèle à (d) qui est perpendiculaire à (d')
Soit A le point d'intersection de (d') et (d'').
On a donc $(d') = d(A, \vec{v})$ et $(d'') = d(A, \vec{u})$.
Nous nous trouvons donc dans le plan $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$. Or dans un plan, deux droites dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont perpendiculaires si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ (vu en première)
Donc (d) et (d') sont orthogonales $\iff$ $(d'') = d(A, \vec{v})$ est perpendiculaire à $(d') = d(A, \vec{v})$ $\iff$ $\vec{u}.\vec{v} = 0$

Propriété

- Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
- Si deux droites sont orthogonales alors toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Démonstration

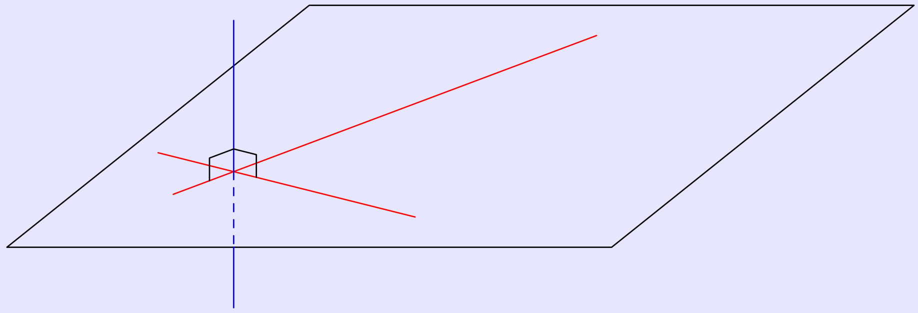
Soient (d), (d') et (d'') trois droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

- Supposons $(d)//(d')$ et $(d) \perp (d'')$.
  On a donc $\vec{u} = \vec{v}$ et $\vec{u}.\vec{w} = 0$ donc $\vec{v}.\vec{w} = 0$
  Ainsi (d') et (d'') sont orthogonales.
- Supposons $(d) \perp (d')$ et $(d)//(d'')$.
  On a donc $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\vec{u} = \vec{w}$ donc $\vec{w}.\vec{v} = 0$
  Ainsi (d') et (d'') sont orthogonales.

c. Orthogonalité d'une droite et d'un plan

Définition

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.



Propriété

Soit la droite (d) dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
Soit le plan $\mathcal{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires.
(d) est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\vec{u}.\vec{w} = 0$.

Démonstration

Soit la droite (d) dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
Soit le plan $\mathcal{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires.
(d) est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.
Soit $\vec{p}$ et $\vec{q}$ des vecteurs directeurs de ces deux droites.
On a donc $\vec{p} \perp \vec{u}$ et $\vec{q} \perp \vec{u}$
$\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont des combinaisons linéaires des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ puisque les droites appartiennent au plan $\mathcal{P}$.
$\exists(k_1, k_2, k_3, k_4)$ quatre réels tels que $\vec{p} = k_1\vec{v} + k_2\vec{w}$ et $\vec{q} = k_3\vec{v} + k_4\vec{w}$

$$\begin{cases} \vec{p}.\vec{u} = 0 \\ \vec{q}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (k_1\vec{v} + k_2\vec{w}).\vec{u} = 0 \\ (k_3\vec{v} + k_4\vec{w}).\vec{u} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k_1\vec{v}.\vec{u} + k_2\vec{w}.\vec{u} = 0 \\ k_3\vec{v}.\vec{u} + k_4\vec{w}.\vec{u} = 0 \end{cases}$$

- 1^{er} cas : $k_1 = k_3 = 0$
  On a donc $\vec{p} = k_2\vec{w}$ et $\vec{q} = k_4\vec{w}$.
  Ainsi $\vec{p}$ et $\vec{q}$ sont colinéaires, ce qui est impossible.
- $2^{\text{ème}}$ cas : $k_1 = 0$ et $k_3 \neq 0$
  $k_1 = 0$ donc $k_2 \neq 0$. En effet, sinon, $\vec{p} = \vec{0}$ et $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.
  $$\begin{cases} \vec{p}.\vec{u} = 0 \\ \vec{q}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} k_2\vec{w}.\vec{u} = 0 \\ k_3\vec{v}.\vec{u} + k_4\vec{w}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{w}.\vec{u} = 0 \\ k_3\vec{v}.\vec{u} = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \vec{w}.\vec{u} = 0 \\ \vec{v}.\vec{u} = 0 \end{cases}$$

Démonstration - suite

- $3^{\text{ème}}$ cas : $k_1 \neq 0$ et $k_3 = 0$
  $k_3 = 0$ donc $k_4 \neq 0$. En effet, sinon, $\vec{q} = \vec{0}$ et $\vec{0}$ est colinéaire à tous les vecteurs.
  $\begin{cases} \vec{p}.\vec{u} = 0 \\ \vec{q}.\vec{u} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1\vec{v}.\vec{u} + k_2\vec{w}.\vec{u} = 0 \\ k_4\vec{w}.\vec{u} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1\vec{v}.\vec{u} = 0 \\ \vec{w}.\vec{u} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{v}.\vec{u} = 0 \\ \vec{w}.\vec{u} = 0 \end{cases}$

- $4^{\text{ème}}$ cas : $k_1 \neq 0$ et $k_3 \neq 0$
  Si $\vec{p}$ et $\vec{q}$ étaient colinéaires, on aurait : $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \vec{p} = \lambda\vec{q}$
  Auquel cas, on a $k_1\vec{v} + k_2\vec{w} = \lambda(k_3\vec{v} + k_4\vec{w}) \iff (k_1 - \lambda k_3)\vec{v} = (\lambda k_4 - k_2)\vec{w}$
  Or $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires donc $\begin{cases} k_1 - \lambda k_3 = 0 \\ \lambda k_4 - k_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1 = \lambda k_3 \\ \lambda k_4 - k_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{k_1}{k_3} = \lambda \\ \dfrac{k_1}{k_3}k_4 - k_2 = 0 \end{cases}$
  $\iff \begin{cases} \dfrac{k_1}{k_3} = \lambda \\ k_1k_4 - k_3k_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \vec{p}.\vec{u} = 0 \\ \vec{q}.\vec{u} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1k_3\vec{v}.\vec{u} + k_2k_3\vec{w}.\vec{u} = 0 \\ k_1k_3\vec{v}.\vec{u} + k_1k_4\vec{w}.\vec{u} = 0 \end{cases} \iff$
  $\begin{cases} k_1\vec{v}.\vec{u} + k_2\vec{w}.\vec{u} = 0 \\ (k_1k_4 - k_2k_3)\vec{w}.\vec{u} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} k_1\vec{v}.\vec{u} + k_2\vec{w}.\vec{u} = 0 \\ \vec{w}.\vec{u} = 0 \end{cases}$
  $\iff \begin{cases} k_1\vec{v}.\vec{u} = 0 \\ \vec{w}.\vec{u} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{v}.\vec{u} = 0 \\ \vec{w}.\vec{u} = 0 \end{cases}$

Propriété

Une droite (d) est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Démonstration

Soit la droite (d) dirigée par le vecteur $\vec{u}$.
Soit le plan $\mathcal{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires.
Soit une droite (d') du plan $\mathcal{P}$ dirigée par un vecteur $\vec{p}$.
Il existe k_1 et k_2 deux réels tels que $\vec{p} = k_1\vec{v} + k_2\vec{w}$.
$\vec{p}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

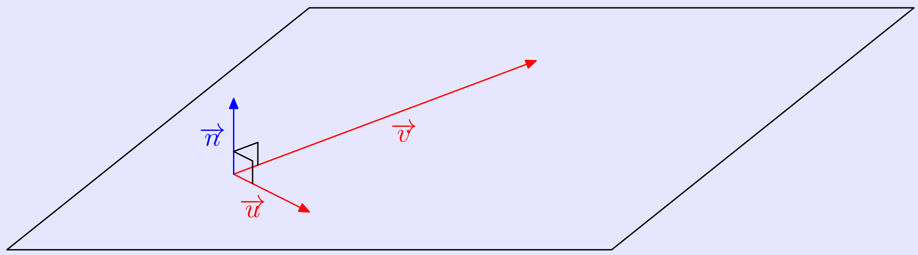
(d) est orthogonale à $\mathcal{P} \implies \vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\vec{u}.\vec{w} = 0$.
$\vec{u}.\vec{p} = \vec{u}.(k_1\vec{w} + k_2\vec{w}) = k_1\vec{u}.\vec{v} + k_2\vec{u}.\vec{w} = k_1 \times 0 + k_2 \times 0 = 0$
Donc (d) et (d') sont orthogonales.

Réciproquement, supposons que (d) soit orthogonales à toutes les droites du plan $\mathcal{P}$.
En particulier elle sera orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.
Donc (d) est orthogonale au plan $\mathcal{P}$.

d. vecteur normal à un plan

Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est appelé vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.



Propriété

Soit A un point de l'espace. Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace.
L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Démonstration

Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace.
Soit A un point de l'espace.
Soit $\mathcal{P}$ le plan passant par A et orthogonal à $\vec{n}$.
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs directeurs (donc non nuls) du plan $\mathcal{P}$. On a donc $\vec{n}.\vec{u} = \vec{n}.\vec{v} = 0$
Ainsi $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{n}$ sont non coplanaires et deux à deux non colinéaires.
$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{n})$ est donc une base de l'espace.
Pour tout point M de l'espace, il existe donc trois réels x, y et z tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{n}$

Soit M un point du plan $\mathcal{P}$.
Il existe x et y deux réels tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ car $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires.
$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = (x\vec{u} + y\vec{v}).\vec{n} = x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} = x \times 0 + y \times 0 = 0$
Ainsi, tous les points M du plan $\mathcal{P}$ vérifient $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.

Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \iff (x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{n}).\vec{n} = 0 \iff x\vec{u}.\vec{n} + y\vec{v}.\vec{n} + z\vec{n}.\vec{n} \iff z\|\vec{n}\|^2 = 0 \iff z = 0$
Donc $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$
Ainsi $M \in \mathcal{P}$.
Tous les points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ appartiennent donc au plan normal à $\vec{n}$ passant par le point A.

L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est donc le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

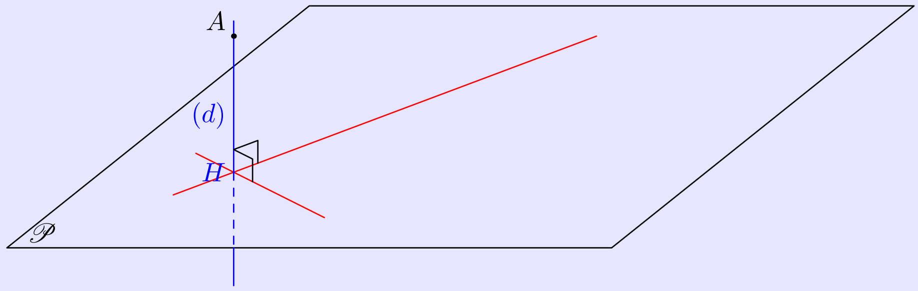
Remarque

On peut donc définir un plan par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.

e. Projeté orthogonal

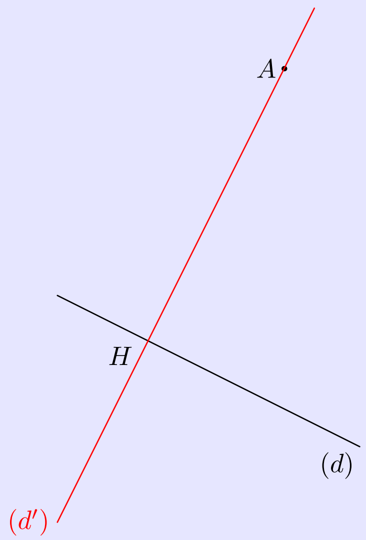
Définition

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point de l'espace.
Il existe une unique droite (d) orthogonale au plan $\mathcal{P}$ passant par le point A.
La droite (d) coupe le plan $\mathcal{P}$ en un unique point H appelé projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.



Définition

Soit (d) une droite de l'espace et A un point de l'espace.
Il existe une unique droite (d') perpendiculaire à la droite (d) passant par le point A.
La droite (d') coupe la droite (d) en un unique point H appelé projeté orthogonal du point A sur la droite (d).



Propriété

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point de l'espace.
Soit H le projeté orthogonal du poin A sur le plan $\mathcal{P}$.
H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A.

Démonstration - à connaître

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point de l'espace.
Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
Si A appartient au plan $\mathcal{P}$ alors H et A sont confondus et donc $AH = 0$.
Supposons donc que $A \notin \mathcal{P}$.
Soit M un point du plan $\mathcal{P}$ distinct de H.
Le triangle AMH est donc rectangle en H.
L'hypoténuse est le plus grand côté d'un triangle rectangle donc $AM > AH$
Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, $AM > AH$
Donc le point H est l epoint du plan $\mathcal{P}$ le plus proche du point A.

Propriété

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point de l'espace.
Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$. Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a :

$$AH = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$$

Démonstration

Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point de l'espace.
Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.
Soit $\overrightarrow{n}$ un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{n}$ sont donc colinéaires.

Soit $M \in \mathcal{P}$
$|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}| = |\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}|$ car H est le projeté orthogonal de M sur la droite (d).
Donc $|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}| = |\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}| = AH\|\overrightarrow{n}\|$
Or $\overrightarrow{n}$ étant normal au plan $\mathcal{P}$, il est non nul donc de norme non nulle.
Ainsi $AH = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$
$\forall M \in \mathcal{P}, AH = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$

Propriété

Soit (d) une droite de l'espace. Soit A un point de l'espace.
Soit H le projeté orthogonal de A sur (d).
Le point H est le point de (d) le plus proche de A.

Démonstration

Soit (d) une droite de l'espace. Soit A un point de l'espace.
Soit H le projeté orthogonal de A sur (d).
Soit M un point de (d) distinct de H.
Le triangle AHM est rectangle en H donc d'après le théorème de Pythagore :
$AM^2 = AH^2 + HM^2$
Donc $AM^2 \geqslant AH^2$ et donc $AM \geqslant AH$
$\forall M \in (d), AM \geqslant AH$

H est donc le point de (d) le plus proche du point A.

Propriété

Soit (d) une droite de l'espace de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Soit B un point de la droite (d). Soit A un point de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de A sur (d).
La distance de A à (d) est la distance AH avec :

$$AH^2 = AB^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|}\right)^2$$

Démonstration

Soit les points H et B sont confondus, auquel cas, $AH^2 = AB^2 = AB^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BA}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)^2$ car $\overrightarrow{BA} = \vec{0}$.

Soit les points H et B sont distincts, auquel cas le triangle ABH est rectangle en H.
Le théorème de Pythagore indique alors :
$AB^2 = AH^2 + HB^2$
$AH^2 = AB^2 - HB^2$
Or H est le projeté orthogonal de A sur (d) donc $\overrightarrow{BA}.\vec{u} = \overrightarrow{BH}.\vec{u}$.
Soit $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{u}$ sont de même sens, auquel cas $\overrightarrow{BH}.\vec{u} = BH\|\vec{u}\|$
Soit $\overrightarrow{BH}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraires, auquel cas $\overrightarrow{BH}.\vec{u} = -BH\|\vec{u}\|$
Dans les deux cas, $\left(\overrightarrow{BH}.\vec{u}\right)^2 = BH^2\|\vec{u}\|^2$
D'où $BH^2 = \frac{\left(\overrightarrow{BH}.\vec{u}\right)^2}{\|\vec{u}\|^2} = \left(\frac{\overrightarrow{BH}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)^2$
Ainsi $AH^2 = AB^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BH}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)^2$

II. Base orthonormée - repère orthonormé

1. Généralités

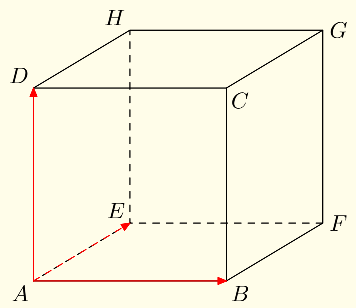
Définition

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace.
Si $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$ et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ alors :

- la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite orthonormée.
- le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthonormé.

Exemple

$ABCDEFGH$ est un cube.



Démontrer que le repère $(O; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est orthonormé.

Réponse

$ABCDEFGH$ est un cube donc $AB = AE = AD = 1$ en prenant pour unité la longueur AB.
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{AB}\|^2 + \|\overrightarrow{AE}\|^2 - \|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AE}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AE^2 - \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EA}\|^2\right)$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AE^2 - \|\overrightarrow{EB}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AE^2 - EB^2\right)$
Or $AB^2 + AE^2 = EB^2$ d'après le théorème de Pythagore dans le triangle AEB rectangle en A.
Donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(EB^2 - EB^2\right) = 0$
De même $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ et $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{AD} = 0$
Donc le repère $(O; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD})$ est orthonormé.

2. Coordonnées

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormé.

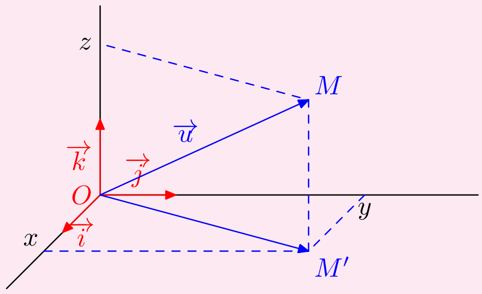
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace dont les coordonnées sont données dans cette base.

Alors

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Démonstration

Soit le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé.



On considère le point M de l'espace tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.
Soit M' le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$ contenant O et de vecteurs directeurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.
Le triangle OMM' est donc rectangle en M'. Donc, d'après le théorème de Pythagore, $OM^2 = OM'^2 + M'M^2$
Or dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan $\mathcal{P}$, $OM' = \sqrt{x^2 + y^2}$
D'où $OM^2 = x^2 + y^2 + M'M^2$
Or $\overrightarrow{MM'} = z\vec{k}$ donc $MM'^2 = \overrightarrow{MM'}.\overrightarrow{MM'} = z\vec{k}.z\vec{k} = z^2\vec{k}.\vec{k} = z^2\|\vec{k}\|^2 = z^2 \times 1 = z^2$
Donc $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$

Propriété

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormé.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace dont les coordonnées sont données dans cette base.

Alors

$$\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Démonstration

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormé.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace dont les coordonnées sont données dans cette base.

Donc $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix}x-x'\\y-y'\\z-z'\end{pmatrix}$

$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-\|\vec{u}-\vec{v}\|\right)$
$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right]\right)$
$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-\left[x^2-2xx'+x'^2+y^2-2yy'+y'^2+z^2-2zz'+z'^2\right]\right)$
$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2+x'^2+y'^2+z'^2-x^2+2xx'-x'^2-y^2+2yy'-y'^2-z^2+2zz'-z'^2\right)$
$\vec{u}.\vec{v}=\frac{1}{2}\left(2xx'+2yy'+2zz'\right)$ $\vec{u}.\vec{v}=xx'+yy'+zz'$

Démonstration

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Démontrons que $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.
Plaçons nous dans une base orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Posons $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$

On a donc $\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}x'+x''\\y'+y''\\z'+z''\end{pmatrix}$.

$\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}=xx'+yy'+zz'+xx''+yy''+zz''$
$\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=x(x'+x'')+y(y'+y'')+z(z'+z'')=xx'+xx''+yy'+yy''+zz'+zz''=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$

Propriété

Soit $(O;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé.
Dans ce repère, on considère deux points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$.

$$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$$

Démonstration

Soit $(O;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé.
Dans ce repère, on considère deux points $A(x_A;y_A;z_A)$ et $B(x_B;y_B;z_B)$.

On a donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\\z_B-z_A\end{pmatrix}$

$AB=\|\overrightarrow{AB}\|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

3. Équation cartésienne d'un plan

Propriété

On munit l'espace d'un repère orthonormé.

- Un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

  Cette équation est appelée équation cartésienne du plan.

- a, b, c, d étant quatre nombres réels tels que a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration

L'espace est muni d'un repère orthonormé.

- Soit $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace.

  Soit $\mathcal{P}$ le plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ passant par le point A.

  Soit $M(x; y; z) \in \mathcal{P}$.
  Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont donc orhogonaux.
  Donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
  $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0 \iff (x - x_A)a + (y - y_A)b + (z - z_A)c = 0 \iff ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$
  $\iff ax + by + cz - (ax_A + by_A + cz_A) = 0$
  En posant $d = -(ax_A + by_A + cz_A)$, on a $ax + by + cz + d = 0$
  Tous les points $M(x; y; z)$ du plan vérifient l'équation $ax + by + cz + d = 0$.
  Donc une équation du plan $\mathcal{P}$ est $ax + by + cz + d = 0$.

- Soient a, b, c, d quatre nombres réels tels que a, b et c sont non tous nuls.
  Soit $\mathcal{Q}$ l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$.
  Supposons que $a \neq 0$. (Le raisonnement serait le même si $b \neq 0$ ou si $c \neq 0$)
  Le point $A\left(\frac{-d}{a}; 0; 0\right)$ est un point de $\mathcal{Q}$ car $a \times \frac{-d}{a} + b \times 0 + c \times 0 + d = -d + d = 0$.
  $d = a\frac{d}{a}$ donc
  $ax + by + cz + d = 0 \iff ax + by + cz + a\frac{d}{a} = 0 \iff a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = 0 \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ avec $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ Donc l'ensemble $\mathcal{Q}$ est le plan normal à $\vec{n}$ passant par le point A.

Exemple

On considère l'espace muni d'un repère orthonormé.

Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point $A(1;2;3)$ et normal au vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Réponse

- Première façon
  Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est de la forme $1x+1y+1z+d=0$ avec $d\in\mathbb{R}$.
  Or $A\in\mathcal{P}$ donc $1+2+3+d=0$ d'où $d=-6$
  Ainsi une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $x+y+z-6=0$

- Deuxième façon
  Soit $M(x;y;z)\in\mathcal{P}$.
  On a donc $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$
  Donc $(x-1)\times 1+(y-2)\times 1+(z-3)\times 1=0 \iff x+y+z-6=0$
  Ainsi une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est $x+y+z-6=0$

Point d'intersection d'un plan et d'une droite

On peut donc maintenant trouver l'éventuel point d'intersection d'un plan $\mathcal{P}$ dont on connaît une équation cartésienne et d'une droite (d) dont on connaît une représentation paramétrique.

L'équation cartésienne du plan est de la forme $ax+by+cz+d=0$ et la représentation paramétrique de la droite est de la forme $\begin{cases} x=ft+g\\ y=f't+g'\\ z=f''t+g''\end{cases}$

On remplace donc x, y et z dans l'equation cartésienne du plan par leur expression en fonction de t.
On a ainsi une équation du premier degré :
$aft+ag+bf't+bg'+cf''t+cg''+d=0 \iff (af+bf'+cf'')t+ag+bg'+cg''+d=0$

- 1^er^ cas : $af+bf'+cf''=0$ et $ag+bg'+cg''+d=0$
  L'équation $(af+bf'+cf'')t+ag+bg'+cg''+d=0$ admet une infinité de solutions. Il s'agit donc de la droite (d). $(d)\subset\mathcal{P}$.

- 2^ème^ cas : $af+bf'+cf''=0$ et $ag+bg'+cg''+d\neq 0$
  L'équation $(af+bf'+cf'')t+ag+bg'+cg''+d=0$ n'admet aucune solution. La droite (d) est parallèle strictement au plan $\mathcal{P}$.

- 3^ème^ cas : $af+bf'+cf''\neq 0$
  $(af+bf'+cf'')t+ag+bg'+cg''+d=0 \iff t=-\frac{ag+bg'+cg''+d}{af+bf'+cf''}$
  On peut donc remplacer t par sa valeur dans la représentation paramétrique de la droite (d).
  $$\begin{cases} x=-\dfrac{ag+bg'+cg''+d}{af+bf'+cf''}f+g=\dfrac{b(f'g-fg')+c(f''g-fg'')-fd}{af+bf'+cf''}\\ y=-\dfrac{ag+bg'+cg''+d}{af+bf'+cf''}f'+g'=\dfrac{a(fg'-f'g)+c(f''g-fg'')-f'd}{af+bf'+cf''}\\ z=-\dfrac{ag+bg'+cg''+d}{af+bf'+cf''}f''+g''=\dfrac{a(fg''-f''g)+b(f'g''-f"g')-f''d}{af+bf'+cf''}\end{cases}$$
  Le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (d) est le point de coordonnées $\left(\frac{b(f'g-fg')+c(f''g-fg'')-fd}{af+bf'+cf''};\frac{a(fg'-f'g)+c(f''g-fg'')-f'd}{af+bf'+cf''};\frac{a(fg''-f''g)+b(f'g''-f"g')-f''d}{af+bf'+cf''}\right)$

Exemple

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $x + 2y + 3z + 6 = 0$.

Soit la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t + 1 \\ z = t \end{cases}$

Déterminer l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (d).

Réponse

$x + 2y + 3z + 6 = 0 \iff 2t + 3 + 2(3t + 1) + 3t + 6 = 0 \iff 2t + 3 + 6t + 2 + 3t + 6 = 0$
$\iff 11t + 11 = 0 \iff 11t = -11 \iff t = -1$

Ainsi on a : $\begin{cases} x = 2 \times (-1) + 3 = 1 \\ y = 3 \times (-1) + 1 = -2 \\ z = -1 \end{cases}$

On vérifie que les coordonnées trouvées vérifient bien l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$:
$1 + 2 \times (-2) + 3 \times -1 + 6 = 1 - 4 - 3 + 6 = 0$

Les coordonnées du point d'intersection vérifient bien l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ donc le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (d) est le point de coordonnées $(1; -2; -1)$.

Exemple

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - 3y + z - 5 = 0$.
Soit $A(1; -2; 3)$. Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

Réponse

Le plan $\mathcal{P}$ à pour équation cartésienne $2x - 3y + z - 5 = 0$.
Donc $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.
Soit $H(x_H; y_H; z_H)$ le projeté orthogonal de A sur $\mathcal{P}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont donc colinéaires. Donc il existe un réel k tel que $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$.

Ainsi $\begin{cases} x_H - 1 = 2k \\ y_H - (-2) = -3k \\ z_H - 3 = k \end{cases} \iff \begin{cases} x_H = 2k + 1 \\ y_H = -3k + (-2) \\ z_H = k + 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x_H = 2k + 1 \\ y_H = -3k - 2 \\ z_H = k + 3 \end{cases}$

Or $H \in \mathcal{P}$ donc $2x_H - 3y_H + z_H - 5 = 0$
D'où $2(2k + 1) - 3(-3k - 2) + (k + 3) - 5 = 0$.
$4k + 2 + 9k + 6 + k + 3 - 5 = 0$
$14k + 6 = 0$
$14k = -6$
$k = -\frac{6}{14} = -\frac{3}{7}$

On a donc $\begin{cases} x_H = 2\left(-\dfrac{3}{7}\right) + 1 = -\dfrac{6}{7} + 1 = \dfrac{1}{7} \\ y_H = -3\left(-\dfrac{3}{7}\right) - 2 = \dfrac{9}{7} - 2 = -\dfrac{5}{7} \\ z_H = -\dfrac{3}{7} + 3 = \dfrac{18}{7} \end{cases}$

Le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $\left(\frac{1}{7}; -\frac{5}{7}; \frac{18}{7}\right)$.

III. Approfondissement

1. Intersection de deux plans

Propriété

L'intersection de deux plan $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est :

- Soit le plan $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.
- Soit l'ensemble vide $\emptyset$ si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles.
- soit une droite (d) si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.

Méthode

On considère un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
Soit $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ et $\mathcal{P}' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$ deux plans de l'espace.

- 1^{er} cas : a, b, c, d et a', b', c', d' sont proportionnels.
  Alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.
  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \mathcal{P}$
- $2^{\text{ème}}$ cas : a, b, c et a', b', c' sont proportionnels (mais pas avec d et d').
  Alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles.
  $\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \emptyset$
- $3^{\text{ème}}$ cas : a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels.
  Alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.
  Il faut donc résoudre le système suivant :
  $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ (a - a')x + (b - b')y + (c - c')z + (d - d') = 0 \end{cases}$ On a donc un système de deux équations à trois inconnues.

  Pour le résoudre, on paramètre une des inconnues, x par exemple, en posant $x = t$.
  On déduit les deux autres inconnues en fonction du paramètre t.
  Ainsi on obtient une représentation paramétrique de la droite, intersection des deux plans.

Exemple

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\mathcal{P} : x+2y+z+5=0$ et $\mathcal{P}' : 2x+3y+4z+6=0$ deux plans de l'espace.
Déterminer l'intersection des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Réponse

On a : $a=1$, $b=2$, $c=1$ et $d=5$ ainsi que $a'=2$, $b'=3$, $c'=4$ et $d'=6$.
$\frac{a'}{a}=2$, $\frac{b'}{b}=\frac{3}{2}\neq 2$ donc a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels.
L'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est donc une droite
Résolvons le système

$$\begin{cases} x+2y+z+5=0 \\ 2x+3y+4z+6=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y+z+5=0 \\ x+y+3z+1=0 \end{cases}$$

Posons $x=t$. On a alors :

$$\begin{cases} x=t \\ t+2y+z+5=0 \\ t+y+3z+1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=t \\ t+2y+z+5=0 \\ 2t+2y+6z+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=t \\ t+2y+z+5=0 \\ t+5z-3=0 \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} t+2y+z+5=0 \\ z=\dfrac{3-t}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=t \\ t+2y+\dfrac{3-t}{5}+5=0 \\ z=\dfrac{3-t}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x=t \\ 2y=-5-t-\dfrac{3-t}{5} \\ z=\dfrac{3-t}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x=t \\ 2y=\dfrac{-28-4t}{5} \\ z=\dfrac{3-t}{5} \end{cases} \iff \begin{cases} x=t \\ y=\dfrac{-28-4t}{10} \\ z=\dfrac{3-t}{5} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x=t \\ y=-0,4t-2,8 \\ z=-0,2t+0,6 \end{cases}$$

Une représentation paramétrique de la droite (d), intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ est $\begin{cases} x=t \\ y=-0,4t-2,8 \\ z=-0,2t+0,6 \end{cases}$

2. Déterminer un vecteur orthogonal à deux vecteurs non colinéaires

Propriété

Si une vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ alors le vecteur $\vec{n}$ est normal à tous les plans dirigés par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Il dirige donc la droite, intersection de deux plans de vecteurs normaux $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exemple

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\\4\end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées d'un vecteur $\vec{n}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Réponse

En reprenant l'exemple précédent, on remaruqe que le vecteur $\vec{u}$ est noraml au plan $\mathcal{P}$ et que le vecteur $\vec{v}$ est normal au plan $\mathcal{P}'$.
Donc le vecteur $\vec{n}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dirige l'intersection (d) de ces deux plans.

Nous avons trouvé $(d) : \begin{cases} x = t \\ y = -0,4t - 2,8 \\ z = -0,2t + 0,6 \end{cases}$

Donc le vecteur $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-0,4\\-0,2\end{pmatrix}$ est donc un vecteur orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\-2\\-1\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3. Équation d'une sphère dont on connaît le centre et le rayon

Propriété

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Une équation de la sphère de centre $\Omega\,(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ et de rayon R est $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$

Démonstration

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $M(x; y; z)$ un point de l'espace. Soit $\Omega\,(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ un autre point de l'espace. Soit $R \in \mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R.
$M \in \mathcal{S} \iff M\Omega = R \iff M\Omega^2 = R^2 \iff (x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$

Exemple

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, Déterminer une equation de la sphère $\mathcal{S}$ de centre $\Omega(1; 2; 3)$ et de rayon 2.

Réponse

Une équation de la sphère de centre $\Omega\,(1; 2; 3)$ et de rayon 2 est $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 2^2$ ou $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 4$.
Ou encore, en développant :
$x^2 - 2x + y^2 - 4y + z^2 - 6z + 10 = 0$

Exemple 2

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit la sphère $\mathcal{S}$ dont une équation est $x^2 - 2x + y^2 - 6y + z^2 - 8z + 10 = 0$.
Déterminer le rayon et les coordonnées du centre de la sphère $\mathcal{S}$.

Réponse

$x^2-2x+y^2-6y+z^2-8z+10=0 \iff x^2-2x+1^2-1^2+y^2-2y\times3+3^2-3^2+z^2-2z\times4+4^2-4^2+10=0$
$\iff x^2 - 2x + 1^2 - 1 + y^2 - 2y \times 3 + 3^2 - 9 + z^2 - 2z \times 4 + 4^2 - 16 + 10 = 0$
$\iff (x-1)^2 - 1 + (y-3)^2 - 9 + (z-4)^2 - 16 + 10 = 0 \iff (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 - 16 = 0$
$\iff (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 16 \iff (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-4)^2 = 4^2$
Donc la sphère $\mathcal{S}$ est la sphère de rayon $\Omega(1;3;4)$ et de rayon 4.

4. Intersection d'une sphère et d'une droite

Propriété

Soit Ω un point de l'espace. Soit $R \in \mathbb{R}$. Soit (d) une droite de l'espace.
Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R.
Soit d_Ω la distance entre le point Ω et la droite (d).

- Si $d_\Omega > R$ alors la droite (d) et la sphère $\mathcal{S}$ ne se coupent pas.
  $(d) \cap \mathcal{S} = \emptyset$
- Si $d_\Omega = R$ alors la droite (d) et la sphère $\mathcal{S}$ se coupent en un point.
  La droite (d) est dite tangente à la sphère $\mathcal{S}$.
- Si $d_\Omega < R$ alors la droite (d) et la sphère $\mathcal{S}$ se coupent en deux points.

Méthode

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit $M(x;y;z)$ un point de l'espace. Soit $\Omega\,(x_\Omega; y_\Omega; z_\Omega)$ un autre point de l'espace. Soit $R \in \mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R.

Soit (d) la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = at + a' \\ y = bt + b' \\ z = ct + c' \end{cases}$

Une équation de la sphère $\mathcal{S}$ est $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$.

Méthode - suite

On remplace alors x, y et z par leur expression en fonction de t.
On arrive alors à une équation du second degré (E) d'inconnue t.

- Si (E) n'a pas de solution alors la sphère $\mathcal{S}$ et la droite (d) ne se coupent pas.
  $\mathcal{S} \cap (d) = \emptyset$
- Si (E) a une seule solution alors la sphère $\mathcal{S}$ et la droite (d) se coupent en un seul point et la droite (d) est tangente à la sphère $\mathcal{S}$.
  On remplace t par sa valeur dans les expressions de x, y et z pour obtenir les coordonnées du point d'intersection de $\mathcal{S}$ et (d).
- Si (E) a deux solutions alors la sphère $\mathcal{S}$ et la droite (d) se coupent en deux points.
  On remplace t dans les expressions de x, y et z successivement par les deux solutions de (E) pour obtenir les coordonnées des deux points d'intersection de $\mathcal{S}$ et (d).

Exemple

On considère un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit la sphère $\mathcal{S}$ dont une équation est $x^2 - 2x + y^2 - 6y + z^2 - 8z + 10 = 0$.
Soit la droite (d) dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -t + 1 \\ z = -2t + 3 \end{cases}$
Déterminer les coordonnées des points d'interesection éventuels de la sphère $\mathcal{S}$ et de la droite (d).

Réponse

$x^2 - 2x + y^2 - 6y + z^2 - 8z + 10 = 0 \iff (t+2)^2 - 2(t+2) + (-t+1)^2 - 6(-t+1) + (-2t+3)^2 - 8(-2t+3) + 7,5 = 0$
$\iff t^2 + 4t + 4 - 2t - 4 + t^2 - 2t + 1 + 6t - 6 + 4t^2 - 12t + 9 + 16t - 24 + 7,5 = 0$
$\iff 6t^2 + 10t - 12,5 = 0$

$\Delta = 10^2 - 4 \times 6 \times (-12,5) = 400 > 0$ Il y a donc deux racines :
$t_1 = \frac{-10-\sqrt{400}}{2\times 6} = -\frac{5}{2}$
$t_2 = \frac{-10+\sqrt{400}}{2\times 6} = \frac{5}{6}$

Le premier point d'intersection a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = -\dfrac{5}{2} + 2 & = -\dfrac{1}{2} \\ y = -\left(-\dfrac{5}{2}\right) + 1 & = \dfrac{7}{2} \\ z = -2 \times \left(-\dfrac{5}{2}\right) + 3 & = 8 \end{cases}$$

Le deuxième point d'intersection a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x = \dfrac{5}{6} + 2 & = \dfrac{17}{6} \\ y = -\left(\dfrac{5}{6}\right) + 1 & = \dfrac{1}{6} \\ z = -2 \times \left(\dfrac{5}{6}\right) + 3 & = \dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{S}$ et de (d) sont $\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{2}; 8\right)$ et $\left(\frac{17}{6}; \frac{1}{6}; \frac{4}{3}\right)$.

5. Intersection d'une sphère et d'un plan, plan tangent à une sphère en un point

Propriété

Soit Ω un point de l'espace. Soit $R \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace.
Soit $\mathcal{S}$ la sphère de centre Ω et de rayon R.
Soit d_Ω la distance entre le point Ω et le plan $\mathcal{P}$.

- Si $d_\Omega > R$ alors le plan $\mathcal{P}$ et la sphère $\mathcal{S}$ ne se coupent pas.
  $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \emptyset$
- Si $d_\Omega = R$ alors le plan $\mathcal{P}$ et la sphère $\mathcal{S}$ se coupent en un point.
  Le plan $\mathcal{P}$ est dit tangente à la sphère $\mathcal{S}$.
- Si $d_\Omega < R$ alors le plan $\mathcal{P}$ et la sphère $\mathcal{S}$ se coupent selon un cercle.

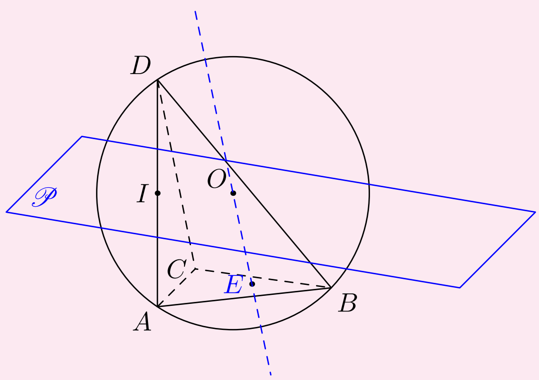
6. Sphère circonscrite à un tétraèdre

Propriété

Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati de l'espace.
Il existe une unique sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$, c'est-à-dire passant par les quatre points A, B, C et D.

Démonstration

Soit $ABCD$ un tétraèdre non aplati de l'espace.
Dans le plan (ABC), on considère le point E, centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
On a donc $EA = EB = EC$.
Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par E.
Grâce au théorème de Pythagore, on démontre aisément que tout point de la droite (d) est équidistant des points A, B et C.
Soit $\mathcal{P}$ le plan médiateur du segment $[AD]$, c'est-à-dire le plan constitué des points équidistants de A et D.
Le tétraèdre n'étant pas aplati, le plan $\mathcal{P}$ n'est pas parallèle à la droite (d).
Ainsi le plan $\mathcal{P}$ coupe la droite (d) en un seul point O.
Le point O est donc équidistant des points A et D et donc aussi des points C et B.
Le point O est donc le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.
Il existe bien une unique sphère (car un seul point O) circonscrite au tétraèdre $ABCD$.



7. Fonction scalaire de Leibniz

Définition

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de points de l'espace.
Soit $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de scalaires (c'est-à-dire une famille de nombres réels).
On appelle fonction scalaire de Leibniz associée au système $((A_i, a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$ l'application f de l'espace dans $\mathbb{R}$ qui, à un point M associe le scalaire (réel) $f(M) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2$.

Propriété

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit O un point de l'espace.
Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de points de l'espace.
Soit $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de scalaires (c'est-à-dire une famille de nombres réels).
Soit f la fonction scalaire de Leibniz associée au système $((A_i, a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.
Soit $\overrightarrow{f}$ la fonction vectorielle de Leibniz associée au système $((A_i, a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.

- Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$ alors :
  $f(M) = f(O) + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{u}$ où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}(M) = f(O) = cste$
- Si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$ alors :
  $f(M) = f(G) + \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i\right) MG^2$ où G est le barycentre du système $((A_i, a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.
  De plus $f(G) = \dfrac{\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_i a_j (A_iA_j)^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i}$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit O un point de l'espace.
Soit $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de points de l'espace.
Soit $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ une famille de scalaires (c'est-à-dire une famille de nombres réels).
Soit f la fonction scalaire de Leibniz associée au système $((A_i, a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.
Soit $\overrightarrow{f}$ la fonction vectorielle de Leibniz associée au système $((A_i, a_i))_{i\in[\![1,n]\!]}$.
Soit M un point de l'espace.

Démonstration - suite

- Supposons que $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$

$f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\left(\overrightarrow{MO}\right)^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i} + \left(\overrightarrow{OA_i}\right)^2\right]$

$f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left[MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i} + OA_i^2\right] = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i MO^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{OA_i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i OA_i^2\right)$

$f(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{OA_i} + f(O)$

$f(M) = 0 \times MO^2 + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{f}(O) + f(O) = f(O) + 2\overrightarrow{MO}.\overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{f}(O) = cste$ (voir chapitre 05)

- Supposons que $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$

$f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i MA_i^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i \left[\left(\overrightarrow{MG}\right)^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} + \left(\overrightarrow{GA_i}\right)^2\right]$

$f(M) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left[MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} + GA_i^2\right] = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i MG^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i}\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i GA_i^2\right)$

$f(M) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) MG^2 + 2\overrightarrow{MG}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \overrightarrow{GA_i}\right) + f(G) = f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) MG^2 + 2\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{0}$

$f(M) = f(G) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) MG^2$

Posons $s = \sum_{i=1}^{n} a_i$.

D'une part :

$\sum_{i=1}^{n} a_i f(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=1}^{n} a_j (A_iA_j)^2 = \left(\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j (A_iA_j)^2\right) + \left(\sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_i a_j (A_iA_j)^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i a_i (\underbrace{A_iA_i}_{0})^2\right)$

$\sum_{i=1}^{n} a_i f(A_i) = 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j (A_iA_j)^2$

D'autre part :

$\sum_{i=1}^{n} a_i f(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \left(f(G) + \left(\sum_{j=1}^{n} a_i\right) A_iG^2\right)$ d'après la formule de $f(M)$ démontrée précédemment.

$\sum_{i=1}^{n} a_i f(A_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i (f(G) + sA_iG^2) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i f(G)\right) + \left(\sum_{i=1}^{n} a_i s A_iG^2\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) f(G) + s\left(\sum_{i=1}^{n} a_i A_iG^2\right)$

$\sum_{i=1}^{n} a_i f(A_i) = sf(G) + sf(G) = 2sf(G)$

Des deux formules de $\sum_{i=1}^{n} a_i f(A_i)$, on déduit que :

$2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j (A_iA_j)^2 = 2sf(G)$

$$f(G) = \frac{2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j (A_iA_j)^2}{2s} = \frac{\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j (A_iA_j)^2}{\sum_{i=1}^{n} a_i}$$