Chapitre IX - Fonction logarithme

Rémi Caneri

Table des matières

I. Fonction logarithme népérien

1. Généralités

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.
Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \exists! y \in \mathbb{R}, e^y = x$.

Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ qui, à tout réel $x > 0$, associe l'unique solution de l'equation $e^y = x$, d'inconnue y.
On note $y = \ln(x)$.

Propriété

- $\ln(1) = 0$
- $\ln(e) = 1$
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \forall y \in \mathbb{R}, (e^y = x \iff y = \ln(x))$
- $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \ln\left(e^x\right) = x$

Démonstration

- $e^0 = 1$ donc $\ln(1) = 0$
- $e^1 = e$ donc $\ln(e) = 1$
- $e^{-1} = \frac{1}{e}$ donc $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -1$
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $y \in \mathbb{R}$.
  $e^y = x \iff y = \ln(x)$ par définition du logarithme népérien.
- Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
  Posons $y = \ln(x)$. On a alors $e^y = x$
  $e^{\ln(x)} = e^y = x$
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Posons $y = e^x$. On a alors $x = \ln(y)$
  $\ln\left(e^x\right) = \ln(y) = x$

2. Dérivation et continuité

Propriété

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration - à connaître

On admet que la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)} = x$.
Or la fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$
Donc $\ln'(x)e^{\ln(x)} = 1$.
D'où $\ln'(x) \times x = 1$ ou encore $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.
Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Propriété

La fonction logarithme népérien est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction f définie sur l'intervalle I par $f(x) = \ln(u(x))$ est dérivable et

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par $f(x) = \ln(u(x))$.
La fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction u l'est sur I donc la fonction f l'est sur I.
De plus, on a :

$$\forall x \in I, f'(x) = u'(x) \times \ln'(u(x)) = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$. Déterminer $f'(x)$.

Réponse

$f(x) = \ln\left(x^2 + 2x + 2\right)$
En posant $u(x) = x^2 + 2x + 2$, on a $f(x) = \ln(u(x))$.
$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 < 0$ donc $x^2 + 2x + 2$ est du signe du coefficient en x^2 et ne s'annule pas, c'est-à-dire strictement positif.
De plus, la fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x + 2$.
Donc $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{2x+2}{x^2+2x+2}$

3. Limites en 0 et $+\infty$

Propriété

- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Démonstration

- Soit $A \in \mathbb{R}$.
  $x > e^A \iff \ln(x) > A$ car la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
  Asini $\forall A \in \mathbb{R}, \ln(x) > A \iff x > e^A$ Donc pour tout réel A, l'intervalle $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $\ln(x)$ pour x assez grand.
  Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0} -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{X \to +\infty} -\ln(X) = -\infty$

4. Sens de variation

Propriété

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$ car $x > 0$.
Donc la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Résumé

On peut résumer les résultats précédents dans le tableau de signe de $\ln'(x)$ et de variation de ln.

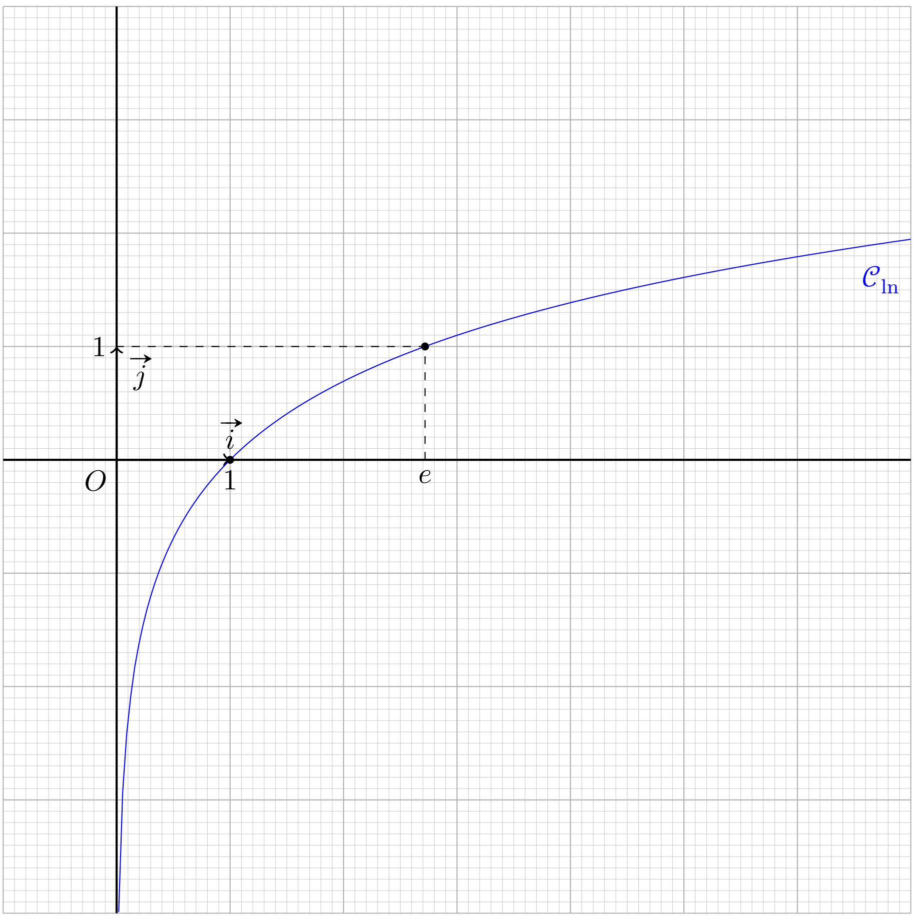
x	0	1	e	$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$		
$\ln$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

Remarque

La fonction logarithme népérien étant strictement croissante, on a, pour tous réels strictement positifs a et b :

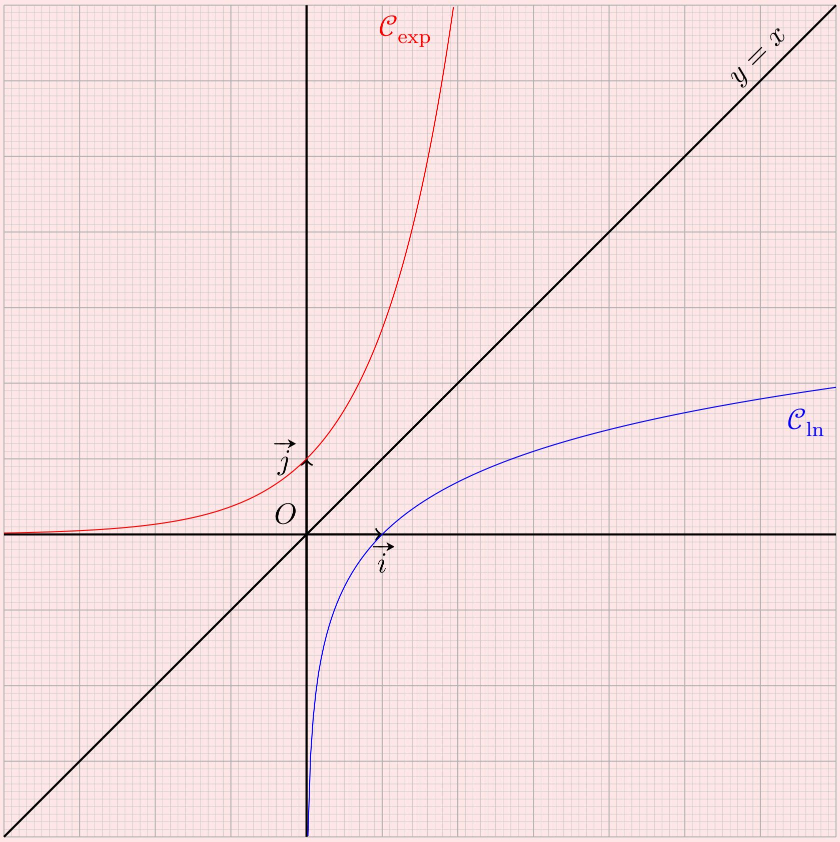
- $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$
- $\ln(a) < \ln(b) \iff a < b$
- $\ln(a) > 0 \iff a > 1$
- $\ln(a) < 0 \iff a < 1$

5. Courbe représentative



Remarque

Les courbes des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



II. Propriétés algébriques du logarithme népérien

Propriété

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous réels a et b strictement positifs, on a

- $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$
- $\ln(a) - \ln(b) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$
- $-\ln(b) = \ln\left(\frac{1}{b}\right)$
- $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soient a et b deux réels strictement positifs.

- Posons $A = \ln(a) + \ln(b)$ et $B = \ln(ab)$.
  $e^A = e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)}e^{\ln(b)} = ab$
  $e^B = e^{\ln(ab)} = ab$
  Donc $e^A = e^B$.
  Ainsi $\ln(e^A) = \ln(e^B)$.
  Et donc $A = B$ ou encore $\ln(a)+\ln(b) = \ln(ab)$
- $\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$
  Donc $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
- $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(1) - \ln(b) = 0 - \ln(b) = -\ln(b)$
- Posons $A = \ln\left(a^n\right)$ et $B = n\ln(a)$
  $e^A = e^{\ln(a^n)}a^n$
  $e^B = e^{n\ln(a)} = \left(e^{\ln(a)}\right)^n = a^n$
  Donc $e^A = e^B$.
  Ainsi $\ln\left(e^A\right) = \ln\left(e^B\right)$.
  D'où $A = B$ ou encore $\ln\left(a^n\right) = n\ln(a)$

III. Croissances comparées

Propriété

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

Démonstration

On sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$

Donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$

$\lim\limits_{x \to +/infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{e^{\ln(x)}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{X}{e^X} = 0$

Propriété - admise

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Propriété

$$\lim_{x \to 0} x \ln(x) = 0$$

Démonstration - à connaître

$\lim\limits_{x \to 0} x \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\ln(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \frac{-\ln(X)}{X} = 0$

Propriété - admise

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \lim_{x \to 0} x^n \ln(x) = 0$$

Propriété

$$\lim_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Démonstration

$\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x-1}$ en posant $x = 1 + h \iff h = x - 1$

Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = \ln'(1)$ car la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{1} = 1$

IV. Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$.
L'équation $\ln(x) = a$ admet une unique solution x_0 dans $\mathbb{R}_+^*$.

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}$.
La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $\ln(x) = a$ admet une unique solution $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$.

Réponse

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$.
La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, il faut que :

- $x > 0$
- $x \neq 0$
- $1 - \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{1}{x} < 1 \iff x > 1$

Les solutions éventuelles doivent donc être strictement supérieures à 1.

$2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \iff \ln(x^2) + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \iff \ln\left(x^2\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right) = 0$
$\iff \ln\left(x^2 - x\right) = 0 \iff x^2 - x = 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$
$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 5 > 0$
L'équation $x^2 - x - 1 = 0$ admet donc deux solutions :
$x_1 = \frac{-(-1)-\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
$x_2 = \frac{-(-1)+\sqrt{5}}{2\times 1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Or $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 1$ et $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > 1$
Donc La solution de l'équation $2\ln(x) + \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0$ est $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
$\mathcal{S} = \left\{\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.
L'inéquation $\ln(x) > a$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]e^a; +\infty[$.
L'inéquation $\ln(x) < a$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]-\infty; e^a[$.
L'inéquation $\ln(x) \geqslant a$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $[e^a; +\infty[$.
L'inéquation $\ln(x) \leqslant a$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]-\infty; e^a]$.
L'inéquation $e^x > b$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]\ln(b); +\infty[$.
L'inéquation $e^x < b$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]-\infty; \ln(b)[$.
L'inéquation $e^x \geqslant b$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $[\ln(b); +\infty[$.
L'inéquation $e^x \leqslant b$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]-\infty; \ln(b)]$.

Exemple

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geqslant 0$.

Réponse

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geqslant 0$.
La fonction ln étant définie sur $\mathbb{R}_+^*$, il faut que :

- $x>0 \iff x \in]0;+\infty[$
- $x \neq 0$
- $1+\frac{2}{x}>0 \iff \frac{2}{x}>-1$, ce qui est toujours le cas lorsque $x>0$

Les solutions éventuelles doivent donc être strictement supérieures à 0.

$2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geqslant 0 \iff \ln(x^2)+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right) \geqslant 0 \iff \ln\left(x^2\left(1+\frac{2}{x}\right)\right) \geqslant 0$
$\iff \ln\left(x^2+2x\right) \geqslant 0 \iff x^2+2 \geqslant 1 \iff x^2+2x-1 \geqslant 0$
$\Delta = 2^2-4\times 1\times(-1)=8>0$
Le polynôme $x^2-x-1=0$ admet donc deux racines :
$x_1=\frac{-2-\sqrt{8}}{2\times 1}=\frac{-2-2\sqrt{2}}{2}=-1-\sqrt{2}$
$x_2=\frac{-2+\sqrt{8}}{2\times 1}=\frac{-2+2\sqrt{2}}{2}=-1+\sqrt{2}$

On a donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
x^2+2x-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

Les solutions de l'inéquation $x^2+2x-1>0$ sont les éléments de $\left]-\infty;-1-\sqrt{2}\right] \cup \left[-1+\sqrt{2};+\infty\right[$.
Donc les solutions de l'inéquation $2\ln(x)+\ln\left(1+\frac{2}{x}\right)=0$ sont les éléments de

$$\left(\left]-\infty;-1-\sqrt{2}\right] \cup \left[-1+\sqrt{2};+\infty\right[\right) \cap]0;+\infty[= \left[-1+\sqrt{2};+\infty\right[$$

$$\mathcal{S}=\left[-1+\sqrt{2};+\infty\right[$$

V. Algorithme

On souhaite déterminer une approximation du nombre $ln(x)$ pour tout nombre réel x strictement positif. Pour cela on utilise un algorithme publié en 1617 par Henri Briggs.

1. On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : Algorithme de Briggs

Entrées : x : un réel strictement positif
p : une puissance négative de 10
n←0
tant que $|x-1|>p$ **faire**
  x←$\sqrt{x}$
  n←n+1
fin
res←$(x-1)\times 2^n$
Sorties : res

(a) Pour $p = 10^{-3}$ et $x = 2$, recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous à l'aide d'une calculatrice. *Arrondir au dix -millième si besoin.*

n	0	1	2	3	...
x					
$\lvert x-1\rvert$					

(b) Faire de même pour $p = 10^{-3}$ et $x = 0,8$.

(c) Coder en Python la fonction `Briggs(x, p)`.

(d) Comparer les valeurs de `Briggs(2, 0.001)` et `Briggs(0.8, 0.001)` avec les valeurs de $\ln(2)$ et $\ln(0,8)$ obtenues à la calculatrice.

2. Nous allons justifier que l'algorithme de Briggs est correct.

(a) Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = x$, nombre dont on souhaite calculer le logarithme, et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.
On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$

i. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_0)$.

ii. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0, puis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1.

iii. Conclure au sujet de la boucle de l'algorithme de Briggs

(b) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(t) = \frac{\ln(1+t)-\ln(1)}{t}$.

i. Justifier que $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = 1$.

ii. En déduire que si u_n est proche de 1 alors $u_n - 1 \approx v_n$.

iii. Expliquer pourquoi la valeur renvoyée par la fonction `Briggs(x, p)` correspond bien à une valeur approchée de $\ln(x)$.

Réponse

1. (a)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	2	$1,4142$	$1,1892$	$1,0905$	$1,0442$	$1,0218$	$1,0108$	$1,0054$	$1,0027$	$1,0014$	$1,0007$
$\|x-1\|$	1	0,4142	0,1892	0,0905	0,0442	0,0218	0,0108	0,0054	0,0027	0,0014	0,0007

(b)

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x	0.8	0,8944	0,9457	0,9725	0,9862	0,9931	0,9965	0,9982	0,9991
$\|x-1\|$	1	0,1056	0,0543	0,0275	0,0138	0,0069	0,00035	0,0018	0,0009

(c)

```python
import math
def Briggs(x, p):
    n=0
    while abs(x-1)>p:
        x=math.sqrt(x)
        n=n+1
    res = (x-1)*(2**n)
    return res
```

(d) `Briggs(2, 0.001)` renvoie 0.6933818297000016 et à la calculatrice, $\ln(2) \approx 0,6931$.
`Briggs(0.8, 0.001)` renvoie $-0,2230$ et à la calculatrice, $\ln(0,8) \approx -0,2231$.

2. Nous allons justifier que l'algorithme de Briggs est correct.

(a) i. Démontrons par récurrence $\forall n \in \mathbb{B}, \mathcal{P}(n) : v_n = \frac{1}{2^n} \ln(u_0)$.

- <u>Initialisation :</u> $n = 0$
  $v_0 = \ln(u_0)$
  $\frac{1}{2^0} \ln(u_0) = \ln(u_0)$
  Donc $v_0 = \frac{1}{2^0} \ln(u_0)$
  $\mathcal{P}(0)$ est donc vraie.
- <u>Hérédité :</u> Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(k)$ soit vraie. Démontrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
  $v_{k+1} = \ln(u_{k+1}) = \ln\left(\sqrt{u_k}\right) = \frac{1}{2}\ln(u_k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^k}\ln(u_0) = \frac{1}{2^{k+1}}\ln(u_0)$
  Donc $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.
- <u>Conclusion :</u> $\forall n \in \mathbb{B}, \mathcal{P}(n) : v_n = \frac{1}{2^n}\ln(u_0)$

ii. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n}\ln(u_0) = 0$
$n = \ln(u_n) \iff u_n = e^{v_n}$
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = e^0 = 1$

iii. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1 \iff \lim\limits_{n\to+\infty} u_n - 1 = 0$
Donc pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, il existe un certain $k \in \mathbb{N}$ tel que $|u_k - 1| \leqslant p$.
La boucle de l'algorithme se termine donc. L'algorithme est donc correct.

(b) i. $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)-\ln(1)}{t} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln(x)-\ln(1)}{x-1} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

ii. $1 = \lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n - 1) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(1+u_n-1)-\ln(1)}{u_n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln(u_n)}{u_n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n-1}$
Donc pour n très grand, $\frac{v_n}{u_n-1} \approx 1$ soit $v_n \approx u_n - 1$.
Or $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
Donc si n est proche de 1 alors $v_n \approx u_n - 1$.

iii. La valeur renvoyée par la fonction `Briggs(x, p)` correspond à $(u_n - 1) \times 2^n$.
Or la fonction s'arrête lorsque $u_n - 1$ est proche de 0 (car inférieur à p), c'est-à-dire quand u_n est proche de 1.
Donc la valeur renvoyée vaut approximativement $v_n \times 2^n = \frac{1}{2^n}\ln(u_0) \times 2^n = \ln(u_0) = \ln(x)$

VI. Approfondissements

1. Logarithme de base b avec $b \in \mathbb{R}$

Définition

On appelle fonction logarithme de base b la fonction, notée $\log_b$, qui , à tout $x > 0$ associe $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$.

Remarque

- La fonction ln est donc la fonction $\log_e$.
- La fonction $\log_2$ est utilisée en informatique.
- La fonction $\log_{10}$ est utilisée en physique. On la notera aussi log.
- Toutes les fonctions $\log_b$ ont les mêmes propriétés algébriques que la fonction ln.

2. Fonction $x \mapsto x^\alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$

Définition

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto x^\alpha$ est la fonction, qui à $x > 0$, associe $e^{\alpha \ln(x)}$.
On appelle cette fonction une fonction puissance.

Propriété

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit α et β deux nombres réels.

- $x^\alpha \times x^\beta = x^{\alpha+\beta}$
- $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta}$
- $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Soit α et β deux nombres réels.

- $x^\alpha \times x^\beta = e^{\alpha\ln(x)} \times e^{\beta\ln(x)} = e^{\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)} = e^{(\alpha+\beta)\ln(x)} = x^{\alpha+\beta}$
- $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{e^{\alpha\ln(x)}}{e^{\beta\ln(x)}} = e^{\alpha\ln(x)-\beta\ln(x)} = e^{(\alpha-\beta)\ln(x)} = x^{\alpha-\beta}$
- $(x^\alpha)^\beta = \left(e^{\alpha\ln(x)}\right)^\beta = e^{\alpha\ln(x)\times\beta} = e^{(\alpha\beta)\ln(x)} = x^{\alpha\beta}$

3. Limite de $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ avec $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- 1^{er} cas : $x \neq 0$
  $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)} = e^{x\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}}$
  Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x}{n} = 0$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{x\frac{\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}} = \lim\limits_{h\to0} e^{x\frac{\ln(1+h)}{h}} = e^x$
- $2^{\text{ème}}$ cas : $x = 0$
  $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = 1^n = 1 = e^0$
  Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^0$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$