# Chapitre X -Primitives

Rémi Caneri

# Table des matières

# I. Primitive d'une fonction continue

## 1. Généralités

**Définition**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$.
On appelle primitive de la fonction $f$, toute fonction $F$ dérivable sur $I$ telle que $F' = f$.

**Théorème - admis**

Soit $I$ un intervalle.
Toute fonction continue sur $I$ admet des primitives sur $I$.

**Exemple**

Donner, si elle existe, une primitive de la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$.

**Réponse**

La fonction $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ car la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ l'est.
Donc la fonction $f$ admet des primitives sur $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $F$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = 2x - \ln(x)$ est une primitive de $f$ car $F'(x) = 2 - \frac{1}{x} = f(x)$.
On peut remarquer que la fonction $F_1$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = 2x - \ln(x) + 1$ est aussi une primitive de $f$ car $F_1'(x) = 2 - \frac{1}{x} + 0 = 2 - \frac{1}{x} = f(x)$

**Propriété**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Soit $F$ une primitive de la fonction $f$ sur $I$.
Soit $G$ une fonction dérivable sur $I$.

$$G \text{ est une primitive de } f \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = F(x) + c$$

**Démonstration - à connaître**

$(1) \implies (2)$
Supposons que $G$ est une primitive de $f$ sur $I$.
$\forall x \in I, G'(x) = f(x)$
Or $F$ est une primitive de $f$ sur $I$.
$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$
Ainsi $\forall x \in I, (G - F)'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$
Donc la fonction $(G - F)$ est constante car sa dérivée est nulle.
Donc $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, (G - F)(x) = c$
Ou encore $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) - F(x) = c$
Soit $\exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = F(x) + c$

$(2) \implies (12)$
Supposons qu'il existe $c \div in\mathbb{R}$ tel que $\forall x \in I, G(x) = F(x) + c$
$\forall x \in I, G'(x) = F'(x) + 0 = f(x)$
Donc $G$ est une primitive de $f$ sur $I$.

### Propriété

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Soit $x_0 \in I$. Soit $y \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive $F$ de $f$ sur $I$ telle que $F(x_0) = y_0$.

### Démonstrations

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle $I$. Soit $x_0 \in I$. Soit $y \in \mathbb{R}$.
Soit $G$ un primitive de $f$ sur $I$.
Posons $F(x) = G(x) - G(x_0) + y_0$.
$F$ est aussi une primitive de $f$ sur $I$ car $F'(x) = G'(x) - 0 + 0 = G'(x) = f(x)$.
De plus $F(x_0) = G(x_0) - G(x_0) + y_0 = y_0$
Donc il existe bien une primitive $F$ de $f$ sur $I$ telle que $F(x_0) = y_0$.

Supposons qu'il existe deux primitives $F_1$ et $F_2$ de $f$ sur $I$ qui vérifient $F_1(x_0) = y_0$ et $F_2(x_0) = y_0$.
$\exists c_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, F_1(x) = G(x) + c_1$
$\exists c_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in I, F_2(x) = G(x) + c_2$
$F_1(x_0) = y_0 = F_2(x_0)$
$F_1(x_0) = F_2(x_0) \implies G(x_0) + c_1 = G(x_0) + c_2 \implies c_1 = c_2$
Donc $\forall x \in I, F_1(x) = F_2(x)$

Ainsi Il existe une unique primitive $F$ de $f$ sur $I$ telle que $F(x_0) = y_0$.

### Exemple

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x + 3$.
Déterminer la primitive $F$ de $f$ sur $\mathbb{R}$ telle que $F(0) = 5$.

**Réponse**

La fonction $G$ définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = 2e^x + 3x$ est une primitive de $f$ sur $I$ car $\forall x \in I, G'(x) = 2e^x + 3$.
Donf il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = G(x) + c$.
Or $F(0) = 5$ donc $G(0) + c = 5$
Ainsi $2e^0 + 3 \times 0 + c = 5$
D'où $2 + c = 5$ soit $c = 3$
On a donc $\forall x \in I, F(x) = e^{2x} + 3x + 3$

## 2. Primitives de fonctions de référence

**Propriété**

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$. Soit $F$ une primitive de $f$ sur $I$.
Dans le tableau ci-dessous, $c$ est un réel.

| Si $f(x) =$ | Alors $F(x) =$ | $I$ |
|---|---|---|
| $k$ avec $k \in \mathbb{r}$ | $kx + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $x$ | $\frac{1}{2}x^2$ | $\mathbb{R}$ |
| $x^n$ avec $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0; 1\}$ | $\frac{1}{n+1}x^{n+1}$ | $\mathbb{R}$ si $n > 0$ <br> $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ sir $n \leqslant 2$ |
| $\frac{1}{x}$ | $\ln(x) + c$ | $\mathbb{R}_+^*$ |
| $\frac{1}{x^2}$ | $-\frac{1}{x} + c$ | $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ |
| $\frac{1}{\sqrt{x}}$ | $2\sqrt{x} + c$ | $]0; +\infty[$ |
| $\sin(x)$ | $-\cos(x) + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $\cos(x)$ | $\sin(x) + c$ | $\mathbb{R}$ |
| $e^x$ | $e^x + c$ | $\mathbb{R}$ |

## 3. Opérations sur les primitives

**Propriété**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions continues sur un intervalle $I$. Soient $F$ et $G$ les primitives sur $I$ respectivement de $f$ et $g$. Soit $k \in \mathbb{R}$.

- $F + G$ est une primitive de $f + g$
- $F - G$ est une primitive de $f - g$
- $kF$ est une primitive de $kf$

**Démonstration**

Se démontre grâce aux opérations sur le dérivées.

**Exemple**

Soit $p$ la fonction polynômiale définei sur $\mathbb{R}$ par $p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$.
Déterminer les primitives de $p$.

**Réponse**

$p(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 3$
Donc les primitves de $p$ sont les fonctions $P_c$ définies sur $\mathbb{R}$ par

$$P_c(x) = 2 \times \frac{1}{4}x^4 - 5 \times \frac{1}{3}x^3 + 4 \times \frac{1}{2}x^2 - 3x + c$$

où $c \in \mathbb{R}$
On a donc

$$P_c(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + c$$

## 4. Primitives et composition de fonctions

**Propriété**

Soient $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et à valeurs dans un intervalle $J$.
Soit $v$ une fonction dérivable sur l'intervalle $J$.
Une primitive sur $I$ de la fonction $u' \times (v' \circ u)$ est $v \circ u$.

**Démonstration**

Soient $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et à valeurs dans un intervalle $J$.
Soit $v$ une fonction dérivable sur l'intervalle $J$.
Posons $\forall x \in I, F(x) = (v \circ u)(x)$ et $f(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x)$.
$F'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = f(x)$
Donc $F$ est une primitive de $f$
Et donc $v \circ u$ est une primitive de $u' \times (v' \circ u)$.

**Propriété**

Soit $f$ des fonctions définies sur un intervalle $I$. Soit $F$ une primitive de $f$
Soit $u$ une fonction dérivable sur $I$.
Dans le tableau ci-dessous, $c$ est un réel.

| Si $f(x) =$ | Alors $F(x) =$ | Remarques |
|---|---|---|
| $u'(x)(u(x))^n$ avec $n \in \mathbb{Z} \backslash \{0; 1\}$ | $\frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1} + c$ | $\forall x \in I, u(x) \neq 0$ si $n \leqslant 2$ |
| $\frac{u'(x)}{u(x)}$ | $\ln(u(x)) + c$ | $\forall x \in I, u(x) > 0$ |
| $\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$ | $-\frac{1}{u(x)} + c$ | $\forall x \in I, u(x) \neq 0$ |
| $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$ | $2\sqrt{u(x)} + c$ | $\forall x \in I, u(x) > 0$ |
| $u'(x)\sin(u(x))$ | $-\cos(u(x)) + c$ | |
| $u'(x)\cos(u(x))$ | $-\sin(u(x)) + c$ | |
| $u'(x)e^{u(x)}$ | $e^{u(x)} + c$ | |

**Démonstration**

On démontre ces résultats grâce à la propriété précédente. Par exemple, pour la fonction $f$ définie par $f(x) = \frac{u'(x)}{u(x}$.
$f(x) = u'(x)\frac{1}{u(x} = u'(x)\ln(u(x))$
En posant $v(x) = \ln(x)$, on a $f(x) = u'(x) \times (v \circ u)(x)$.
Les primitives $F_c$ de $f$ sont définies par $F(x) = (v \circ u)(x) + c = \ln(u(x)) + c$

**Exemple**

Soit $f$ la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.
Déterminer la primitive $F$ de $f$ telle que $F\left(\sqrt{5}\right)=1$.

**Réponse**

$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}}$
En posant $u(x)=x^2-1$, on a $f(x)=\frac{1}{2}\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$
Donc il existe $c\in\mathbb{R}$ tel que $F(x)=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{u(x)}+c=\sqrt{u(x)}+c=\sqrt{x^2-1}+c$
Or $F\left(\sqrt{5}\right)=1$ donc $\sqrt{\sqrt{5}^2-1}+c=1$
D'où $\sqrt{5-1}+c=1$ soit $\sqrt{4}+c=1$ ou encore $2+c=1$
Donc $c=-1$
Ainsi $\forall x\in]1;+\infty[, F(x)=\sqrt{x^2-1}-1$