Chapitre XI - Équations différentielles

Rémi Caneri

Table des matières

I. Généralités

Définition

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction et où interviennent des dérivées n-ième de cette fonctions.

Exemple

Sont des équations différentielles d'inconnue la fonction y :

- $y' = \cos(x)$
- $y' = 2y$
- $y'' + 2y' - y = 3x$
- $y'' + 3y = 0$

II. Résolution d'équation différentielle du type $y^{'} = f$ ou f est une fonction

Propriété

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
L'équation différentielle $y' = f$ admet pour solution l'ensemble des primitives de f sur I.

Démonstration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit F une primitive de f sur I.
$\forall x \in I, F'(x) = f(x)$
Donc F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Toutes les primitives de f sont donc solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Soit G une solution de l'équation différentielle $y' = f$.
On a donc $\forall x \in I, G'(x) = f(x)$ donc G est une primitive de f.

L'équation différentielle $y' = f$ admet donc pour solution l'ensemble des primitives de f sur I.

Exemple

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' = \cos(x)$.

Réponse

Une primitive de $x \mapsto \cos(x)$ est $x \mapsto \sin(x)$.
Les solutions de l'équation différentielle $y' = \cos(x)$ sont els primitives de $x \mapsto \cos(x)$.
Ainsi $\mathcal{S} = \{\sin(x) + c, c \in \mathbb{R}\}$

III. du type $y^{'} = ay + b$ où a et b sont des réels avec $a \neq 0$

Propriété

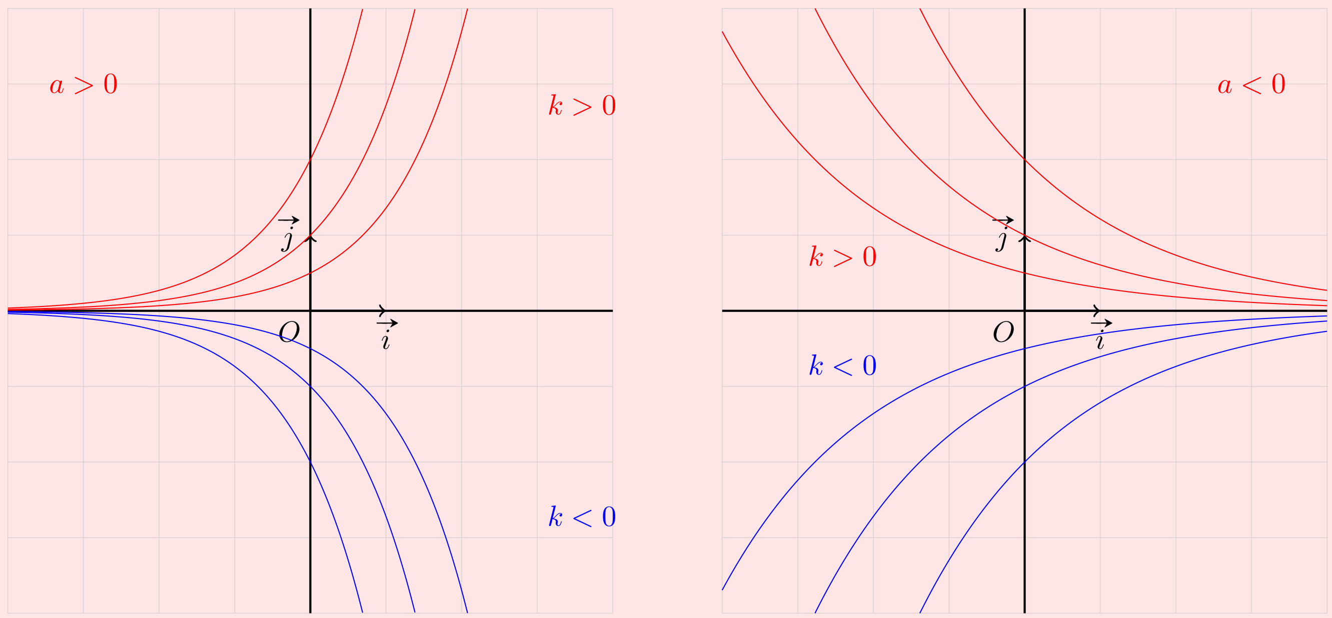
Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
L'équation différentielle $y' = ay$ admet pour solution l'ensemble des fonctions F_k de la forme $F_k(x) = ke^{ax}$ où $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration - à connaître

Soit $a \in \mathbb{R}^*$.
Soit $k \in \mathbb{R}$.
Les fonctions $F_k(x) = ke^{ax}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
$F_k'(x) = kae^{ax} = aF_k(x)$
Donc F_k est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
$\forall k \in \mathbb{R}, F_k$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$.

Soit G une solution de l'équation différentielle $y' = ay$.
Donc $G'(x) = aG(x)$ ou encore $G'(x) - aG(x) = 0$
Posons $f(x) = G(x)e^{-ax}$
$f'(x) = G'(x)e^{-ax} - aG(x)e^{-ax} = e^{-ax}(G'(x) - aG(x)) = e^{-ax} \times 0$
Donc la fonction f est constante.
$\exists k \in \mathbb{R}, f(x) = k$
$f(x) = k \iff G(x)e^{-ax} = k \iff G(x) = ke^{ax}$
Donc les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ sont de la forme $x \mapsto ke^{ax}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Allure des courbes solutions de l'équation différentielle $y' = ay$



Méthode pour trouver les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit $b \in \mathbb{R}$.

- Si $b = 0$, on est dans le cas de la propriété précédente.
- Si $b \neq 0$.
  - On cherche une solution particulière constante :
    Soit g la fonction constante définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = -\frac{b}{a}$.
    En effet, $g'(x) = 0$ et $ag(x) + b = a \times \left(-\frac{b}{a}\right) + b = -b + b = 0 = g'(x)$
    Donc g est bien solution de l'équation $y' = ay + b$.
  - On trouve toutes les solutions :
    Soit f_k une solution de l'équation différentielle.
    On a $f_k' = af_k + b$.
    De plus, g étant une solution de l'équation différentielle, on a $g' = ag + b$.
    Donc $(f_k - g)' = f_k' - g' = (af_k + b) - (ag + b) = af_k + b - ag - b = a(f_k - g)$
    Donc la fonction $(f_k - g)$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ donc les solutions sont de la forme $x \mapsto ke^{ax}$.
    Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, (f_k - g)(x) = ke^{ax}$
    $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) - g(x) = ke^{ax}$
    $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = g(x) + ke^{ax}$
    $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = -\frac{b}{a} + ke^{ax}$

  Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = -\frac{b}{a} + ke^{ax}$, somme de la fonction particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$ et d'une solution de l'équation différentielle $y' = ay$, appelée équation homogène.

Exemple

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = 2y - 3$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(2) = 3$

Réponse

1. Une solution particulière de l'équation différentielle (E) est $g(x) = -\frac{-3}{2} = \frac{3}{2}$.
   L'équation homogène est $y' = 2y$.
   Les solutions de l'équation homogène sont les fonction h_k définies sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x) = ke^{2x}$.
   Donc les solutions de (E) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = g(x) + h_k(x) = \frac{3}{2} + ke^{2x}$.
2. $f_k(2) = 3 \iff \frac{3}{2} + ke^{2\times 2} = 3 \iff ke^4 = \frac{1}{2} \iff k = \frac{1}{2e^4}$
   Donc la fonction f cherchée est la fonction $f_{\frac{1}{2e^4}}$ définie sur $\mathbb{R}$ par
   $f(x) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2e^4}e^{2x} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}e^{2x-4} = \frac{3+e^{2x-4}}{2}$

IV. du type $y^{'} = ay + f$ où a est un réel et f une fonction

Méthode pour trouver les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + f$

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit f une fonction.

- Si f est la fonction nulle, on est dans le cas de la résolution de l'équation différentielle $y' = ay$.
- Si f n'est pas la fonction nulle.
  - On cherche une solution particulière g (ou on nous la donne) :
  - On trouve toutes les solutions :
    Soit f_k une solution de l'équation différentielle.
    On a $f_k' = af_k + f$.
    De plus, g étant une solution de l'équation différentielle, on a $g' = ag + f$.
    Donc $(f_k - g)' = f_k' - g' = (af_k + f) - (ag + f) = af_k + f - ag - f = a(f_k - g)$
    Donc la fonction $(f_k - g)$ est solution de l'équation différentielle $y' = ay$ donc les solutions sont de la forme $x \mapsto ke^{ax}$.
    Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, (f_k - g)(x) = ke^{ax}$
    $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) - g(x) = ke^{ax}$
    $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = g(x) + ke^{ax}$

  Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = g(x) + ke^{ax}$, somme de la fonction particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$ et d'une solution de l'équation différentielle $y' = ay$, appelée équation homogène.

Exemple

On considère l'équation différentielle $(E) : y' = y - \sqrt{2}\sin(x)$.

1. Démontrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ est solution de l'équation (E).
2. En déduire toutes les solutions de l'équation différentielle (E).
3. Déterminer la solution de l'équation différentielle (E) f telle que $f(0) = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$

Réponse

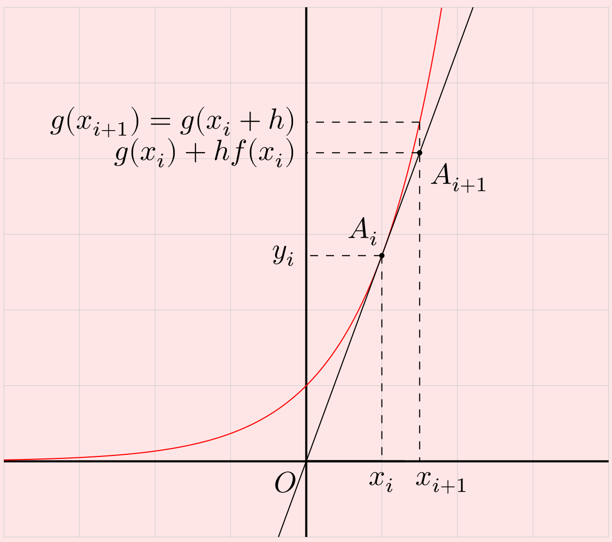
1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $g'(x) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x)$
   $g(x) - \sqrt{2}\sin(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin(x) = \sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2}\sin(x)$
   $g(x) - \sqrt{2}\sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) - \frac{2\sqrt{2}}{2}\sin(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}\sin(x) + \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(x) = g'(x)$
   Donc g est bien solution de (E).
2. L'équation homogène est $y' = y$ donc les solutions sont les fonctions h_k définies sur $\mathbb{R}$ par $h_k(x) = he^x$.
   Donc les solutions de (E) sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par $f_k(x) = g(x) + h_k(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + ke^x$
3. $f_k(0) = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \iff \sin\left(0 + \frac{\pi}{4}\right) + ke^0 = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \iff \frac{\sqrt{2}}{2} + k = \frac{2+\sqrt{2}}{2} \iff k = \frac{2+\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2}{2} = 1$
   La solution f cherchée est la fonction f_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + e^x$

V. Algorithme

Nous allons nous intéresser à la résolution de l'équation $y' = f$ sachant qu'on ne connaît pas de primitive de la fonction f.
En 1768, Leonhard Euler a présenté une méthode permettant de déterminer une approximation d'une solution g de l'équation différentielle $y' = f$ connaissant l'image d'un nombre par la fonction g.

Principe de la méthode

On suppose qu'on connaît y_0 l'image de x_0 par la fonction g.
On a donc $y_0 = g(x_0)$.
Soit $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de la fonction g dans un repère.
Soit A_i un point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse x_i.
Le principe de la méthode d'Euler est de dire que la tangente à la courbe au point A_i est proche de $\mathcal{C}_g$ au voisinage de A_i.



L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_g$ au point A_i est $y = g(x_i) + g'(x_i)(x - x_i)$
Donc pour un nombre h très petit, le point de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse $x_i + h$ est très proche du point de la tangente d'abscisse $x_i + h$.
Autrement dit, $g(x_i + h) \approx g(x_i) + g'(x_i)(x_i + h - x_i)$
Soit $g(x_i + h) \approx g(x_i) + g'(x_i) \times h$
Ou encore $g(x_i + h) \approx g(x_i) + hg'(x_i)$
Soit $g(x_i + h) \approx g(x_i) + hf(x_i)$

On pose donc :

- $x_{i+1} = x_i + h$
- $y_{i+1} = y_i + hf(x_i)$

On trace ensuite la ligne polygonale des grâce aux points $A_i(x_i; y_i)$.

Exemple

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$.
On veut utiliser la méthode d'Euler pour tracer la courbe représentative (ou plutôt une approximation) de la solution g de l'équation différentielle $y' = f$ telle que $g(0) = 0$.

1. On choisit $h = 0,1$. On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + h$.
   On sait que $g(0) = 0$ donc on pose $y_0 = 0$.
   Ainsi $A_0(x_0; y_0) \iff A_0(0; 0)$

   (a) Vérifier, en utilisant la méthode d'Euler que $g(x_1) \approx 0,1$. On pose alors $y_1 = 0,1$.

   (b) Vérifier, en utilisant la méthode d'Euler que $g(x_2) \approx 0,199$. On pose alors $y_1 = 0,199$.

   (c) Vérifier, en utilisant la méthode d'Euler que $g(x_3) \approx 0,295$. On pose alors $y_1 = 0,295$.

   (d) Déterminer y_4.

   (e) Dans un repère orthogonal (1unité =2cm en abscisse et 10 cm en ordonnée), tracer la ligne polygonale $A0A_1A_2A_3A_4$ où $A_k(x_k; y_k)$ avec $k \in [\![0; 4]\!]$.

2. Nous alons automatiser les calculs et donc placer la suite de points A_n à l'aide d'un programme.

   (a) Compléter la fonction `solution(N, h)` ci-dessous, écrite en Python qui a pour paramètre le nombre N de points à placer et le pas h et qui affiche les N premiers points obtenus avec la méthode d'Euler.

```python
from pylab import *

def f(x):
    y = 1 / (1 + x**2)
    return y

def solution(N, h):
    x = 0
    y = 0
    plot(x, y, 'r.')
    for i in range (1, N):
        y = ...
        x = ...
        plot(x, y, 'r.')
    show()

```

   (b) Saisir le programme et l'exécuter avec $N = 100$ et $h = 0,1$.

Exemple - suite

Réponse

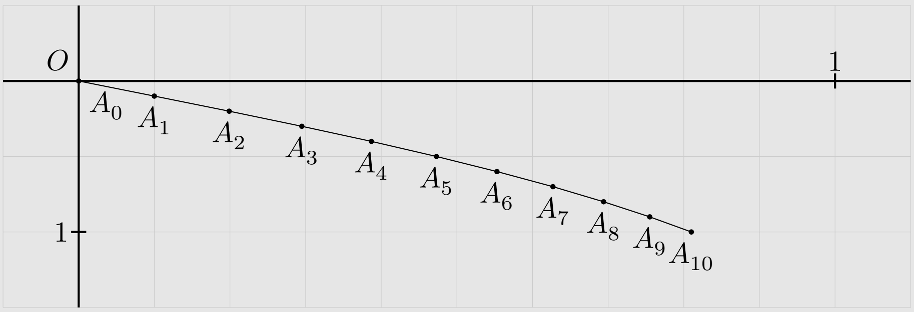
1. (a) $y_1 = g(x_1) = g(x_0 + h) = g(0 + 0,1) \approx g(0) + 0,1 \times f(0) = 0 + 0,1 \times 1 = 0,1$ donc $A_1(0,1; 0,1)$

   (b) $y_2 = g(x_2) = g(x_1 + h) = g(0,1 + 0,1) \approx g(0,1) + 0,1 \times f(0,1) \approx 0,1 + 0,1 \times \frac{1}{0,1^2+1} \approx 0,199$ donc $A_2(0,2; 0,199)$

   (c) $y_3 = g(x_3) = g(x_2 + h) = g(0,2 + 0,1) \approx g(0,2) + 0,1 \times f(0,2) \approx 0,199 + 0,1 \times \frac{1}{0,2^2+1} \approx 0,295$ donc $A_3(0,3; 0,295)$

   (d) $y_4 = g(x_4) = g(x_3 + h) = g(0,3 + 0,1) \approx g(0,3) + 0,1 \times f(0,3) \approx 0,295 + 0,1 \times \frac{1}{0,3^2+1} \approx 0,387$ donc $A_4(0,3; 0,387)$

   (e)



2. Nous alons automatiser les calculs et donc placer la suite de points A_n à l'aide d'un programme.

   (a)

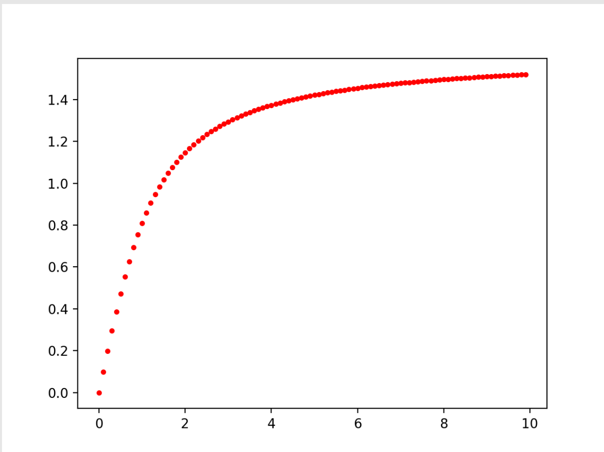
```python
from pylab import *

def f(x):
    y = 1 / (1 + x**2)
    return y

def solution(N, h):
    x = 0
    y = 0
    plot(x, y, 'r.')
    for i in range (1, N):
        y = y+h*f(x)
        x = x+h
        plot(x, y, 'r.')
    show()

```

   (b)



VI. Approfondissement

1. Résolution de l'équation différentielle $y' = y^2$

Parmi les fonctions constantes, seule la fonction nulle est solution de l'équation différentielle $y' = y^2$.

Essayons de trouver des solutions qui ne s'annule pas.
$y' = y^2 \iff \frac{y'}{y^2} = 1 \iff \left(-\frac{1}{y}\right)' = 1 \iff \exists c \in \mathbb{R}, -\frac{1}{y} = x + c \iff \exists c \in \mathbb{R}, y = -\frac{1}{x+c}$
Les fonctions $f_c : x \mapsto -\frac{1}{x+c}$ où $c \in \mathbb{R}$ sont solutions de l'équation différentielle $y' = y^2$.

Supposons qu'une solution g continue s'annule en plusieurs points a_0, a_1, ..., a_n, c'est-à-dire $\forall i \in [\![0; n]\!], g(a_i) = 0$.
Par soucis de facilité, on suppose que $a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_n$.
On a $g'(x) = (g(x))^2 \geqslant 0$
Donc la fonction g est croissante.
Sur l'intervalle $[a_0; a_n]$ la fonction est croissante et $g(a_0) = g(a_n) = 0$
Donc la fonction g est nulle sur $[a_0; a_n]$.

Si la fonction g ne s'annule pas sur $]-\infty; a_0[$, alors $\forall x \in]-\infty; a_0[, g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-\infty; a_0[$.
D'après ce qu'on a vu précédemment, $\exists c_1 \in \mathbb{R}, \forall x \in]-\infty; a_0[, g(x) = -\frac{1}{x+c_1}$
De plus $g(a) = 0$
$\lim\limits_{\substack{x \to a_0 \\ x < a}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a_0 \\ x < a}} -\frac{1}{x+c_1} = -\frac{1}{a_0+c_1} \neq 0 = g(a)$
Donc g ne serait pas continue en a_0.
Ainsi la fonction s'annule encore sur $]-\infty; a_0[$ en un point b.
Et donc g est nulle sur l'intervalle $[b; a_n]$.
Donc peut importe le nombre de points qui annulent la fonction g, on trouvera toujours un point à gauche du plus petit qui annulera encore la fonction g.
La fonction g est donc nulle sur $]-\infty; a_n]$.
On fait le même raisonnement sur $]a_n; +\infty[$.
La fonction g est donc la fonction nulle.

Les solutions de l'équation différentielle $y' = y^2$ sont les fonctions $f_c : x \mapsto -\frac{1}{x+c}$ où $c \in \mathbb{R}$.

2. Résolution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

Résolvons l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$

- 1^er^ cas : $\omega = 0$
  On a alors $y'' = 0$
  D'où $y' = k_1$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$
  Et donc $y = k_1 x + k_2$ avec $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_2 \in \mathbb{R}$

- 2^ème^ cas : $\omega \neq 0$
  On a $y'' + \omega^2 y = 0$
  On admet que les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions $f_{A,B}$ définies sur $\mathbb{R}$ par $f_{A,B}(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$ où A et B sont des réels.

  On peut démontrer aisément que les fonctions $f_{A,B}$ sont solutions :
  En effet, $f'_{A,B}(x) = -A\omega\sin(\omega x) + B\omega\cos(\omega x$
  Donc $f''_{A,B}(x) = -A\omega^2\cos(\omega x) - B\omega^2\sin(\omega x) = -\omega^2(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)) = -\omega^2 f_{A,B}(x)$
  Donc $f''_{A,B}(x) + \omega^2 f_{A,B}(x) = 0$
  $f_{A,B}$ est bien solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

Remarque : il existe deux réels C et φ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f_{A,B}(x) = C\cos(\omega x + \varphi)$
En effet : Soit $x \in \mathbb{R}$.
$f_{A,B}(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x) = \sqrt{A^2 + B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\omega x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\omega x)\right)$
Posons $C = \sqrt{A^2 + B^2}$
$\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 + \left(\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)^2 = \frac{A^2}{A^2+B^2} + \frac{B^2}{A^2+B^2} = \frac{A^2+B^2}{A^2+B^2} = 1$
Donc il existe un réel φ' tel que $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos(\varphi')$ et $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin(\varphi')$.
On a alors $f_{A,B}(x) = C\left(\cos(\varphi')\cos(\omega x) + \sin(\varphi')\sin(\omega x)\right) = C\cos(\omega x - \varphi')$
En posant $\varphi = -\varphi'$, on a $f_{A,B}(x) = C\cos(\omega x + \varphi)$