Chapitre XII - Calcul intégral

Rémi Caneri

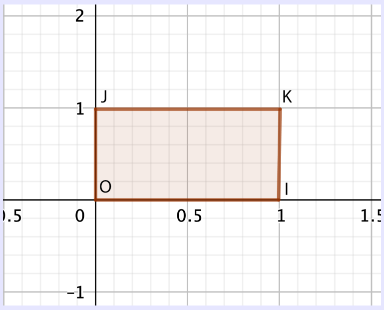
Table des matières

I. Intégrale d'une fonction continue et positive sur un intervalle

1. Unité d'aire

Définition

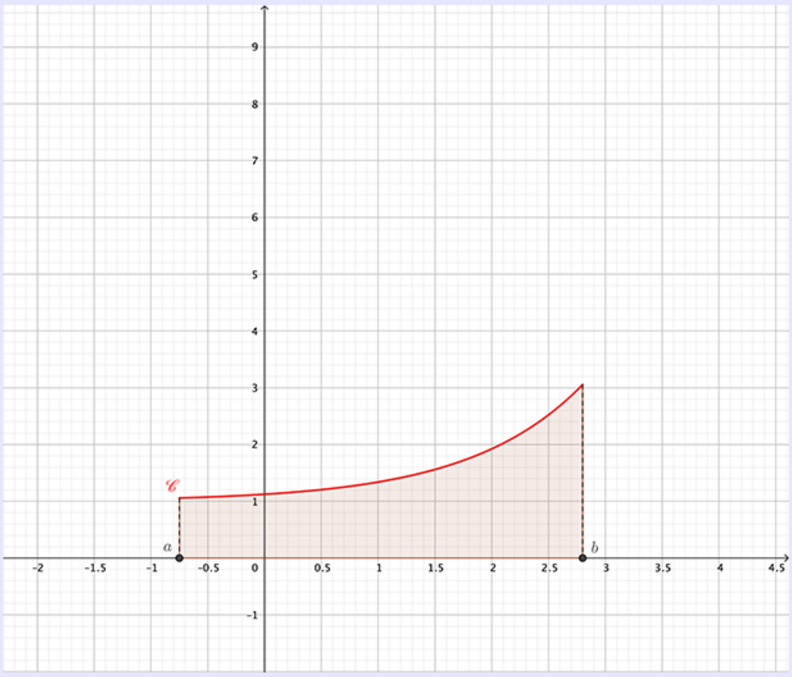
Soit un repère orthogonal $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.
L'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle $OIKJ$ où $K(1;1)$.



2. Aire sous la courbe représentative d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Définition

Soit $\mathcal{C}$ une courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ d'une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
Le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est appelé aire sous la courbe $\mathcal{C}$.



3. Intégrale de a à b d'une fonction continue et positive sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.
L'aire, exprimée en u.a., du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$ est appelé intégrale de a à b de la fonction f.
Elle est notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

Remarque

- Pour toute fonction continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ne dépend que de f et de $[a;b]$. Il est indépendant du choix des unités sur les axes.
- On dit que x est une variable muette car elle ne se retrouve pas dans le résultat. On peut donc noter indifféremment $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = \ldots$.

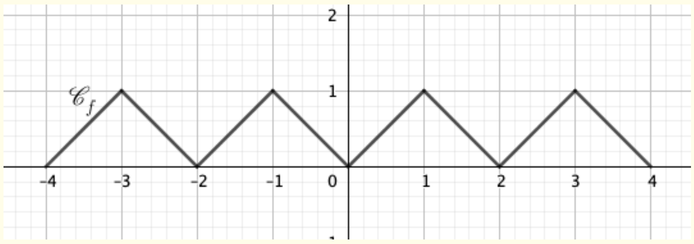
Propriété

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.

- $\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- Pour tous réels c, d, e de l'intervalle $[a;b]$, $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\mathrm{d}x$. (cette relation est appelée relation de Chasles).
- On peut parfois profiter de l'invariance de l'aire par translation ou symétrie.

Exemple

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4;4]$, représentée dans le repère ci-dessous.



Calculer $\int_{-4}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Réponse

Les deuxièmes et troisièmes triangles ont la même aire puisqu'ils sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées. Donc $\int_{-2}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$.
Les premier et quatrièmes triangles sont les images du troisième triangle par translation.
Donc $\int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$ et $\int_2^4 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.
Ainsi $\int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-4}^{-2} f(x)\mathrm{d}x + \int_{-2}^{0} f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_2^4 f(x)\mathrm{d}x$
$\int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x + \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$
$\int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 4\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$
$\int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x = 4 \times \frac{2\times 1}{2} = 4$

4. Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Théorème

Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
La fonction $F_a : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonciton f sur I telle que $F_a(a) = 0$.

Démonstration - à connaître

On ne s'intéressera dans cette démonstration, qu'au cas où f est une fonction continue positive croissante.
Soit x_0 et h deux nombres réels tels que $x_0 \in [a;b]$ et $x_0+h \in [a;b]$.
$F_a(x) = \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$
Donc $F_a(x_0+h) = \int_a^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t = \int_a^{x_0} f(t)\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t = F_a(x_0) + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$
D'où $F_a(x_0+h) - F_a(x_0) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\mathrm{d}t$
Or la fonction f est croissante continue et positive, donc :
$\forall t \in [x_0; x_0+h], f(x_0) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0+h)$.
Ainsi, $f(x_0)(x_0+h-x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) \leqslant f(x_0+h)(x_0+h-x_0)$
Ou encore $hf(x_0) \leqslant \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) \leqslant hf(x_0+h)$.
On a encore $hf(x_0) \leqslant F_a(x_0+h) - F_a(x_0) \leqslant hf(x_0+h)$.

- 1$^{\text{er}}$ cas : $h > 0$.
  On a alors $f(x_0) \leqslant \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \leqslant f(x_0+h)$

- 2$^{\text{ème}}$ cas : $h < 0$
  On a alors $f(x_0) \geqslant \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} \geqslant f(x_0+h)$

  Or $\lim\limits_{h\to 0} f(x_0+h) = f(x_0)$ car f est continue en x_0.
  Donc d'après le théorèmes des gendarmes, on a :
  $\lim\limits_{h\to 0} \frac{F_a(x_0+h)-F_a(x_0)}{h} = f(x_0)$
  Ainsi F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$.
  $\forall x_0 \in [a;b]$, F_a est dérivable en x_0 et $F_a'(x_0) = f(x_0)$.
  Donc F_a est dérivable sur $[a;b]$ et $\forall x \in [a;b], F_a'(x) = f(x)$.
  F_a est donc bien une primitive de f sur $[a;b]$.
  De pus, $F_a(a) = 0$ donc F_a est bien la primitive de f qui s'annule en a.

Exemple

Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\int_1^x t^3\mathrm{d}t$.

Réponse

$\int_1^x t^3\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonction cube qui s'annule en 1.
Or une primitive de la fonction cube est définie par :
$F(x) = \frac{1}{3+1}x^{3+1} + C = \frac{1}{4}x^4 + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Or $F(1) = 0$ donc $\frac{1}{4}(1)^4 + C = 0$
Soit $\frac{1}{4} + C = 0$ ou encore $C = -\frac{1}{4}$.
On a donc $\int_1^x t^3\mathrm{d}t = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}$

Propriété

Soit F une primitive d'une fonction f continue positive sur l'intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in I$. On a :
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ que l'on note aussi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.

Exemple

Calculer $\int_1^4 x^3\mathrm{d}x$.

Réponse

Une primitive de la fonction cube sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{4}x^4$.
Donc $\int_1^4 x^3\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^4 = F(4) - F(1) = \frac{1}{4} \times 4^4 - \frac{1}{4} \times (1)^4 = 64 - \frac{1}{4} = \frac{255}{4}$

II. Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque sur un intervalle

1. Expression d'une primitive à l'aide d'une intégrale

Théorème

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.

Théorème

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a \in I$.
La fonction $F_a : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonciton f sur I telle que $F_a(a) = 0$.

Propriété

Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in I$. On a :
$\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Exemple

Calculer $\int_4^{-2} x^3\mathrm{d}x$.

Réponse

$\int_4^{-2} x^3\mathrm{d}x = -\int_{-2}^4 x^3\mathrm{d}x = -60$ (voir éxercice précédent)

Propriété - Linéarité de l'intégrale

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in I$. On a :

- $\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f)(x)\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Exemple

Calculer $\int_{-1}^{1} 3e^x + x^2 \mathrm{d}x$.

Réponse

$x \mapsto 3e^x$, $x \mapsto e^x$ et $g : x \mapsto x^2$ sont des fonctions continues sur $[-1;1]$.
Donc $\int_{-1}^{1} 3e^x + x^2\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 3e^x\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x = 3\int_{-1}^{1} e^x\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x$
$\int_{-1}^{1} 3e^x + x^2\mathrm{d}x = 3\left[e^x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = 3\left(e^1 - e^{-1}\right) + \frac{1}{3} \times 1^3 - \frac{1}{3} \times (-1)^3$
$\int_{-1}^{1} 3e^x + x^2\mathrm{d}x = 3e - \frac{3}{e} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 3e - \frac{3}{e} + \frac{2}{3}$

Propriété - Relation de Chasles

Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I.
Pour tout réels c, d, e de l'intervalle I, on a :
$\int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\mathrm{d}x$

Propriété

Pour toute primitive F d'une fonction f continue sur un intervalle I.
$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ avec a et b deux éléments de I.
On note aussi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left[F(x)\right]_a^b$.

Démonstration - à connaître

Soit F une primitive d'une fonction f continue positive sur l'intervalle I. Soient $a \in I$ et $b \in I$.
Soit $c \in [a;b]$.
Soit G la fonction définie sur I par $G(x) = F(x) - F(c)$.
La fonction G est une primitive de la fonction f qui s'annule en c.
$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\mathrm{d}t = \int_c^b f(t)\mathrm{d}t - \int_c^a f(t)\mathrm{d}t$
Or $\int_c^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de f qui s'annule en c. Donc $\int_c^x f(t)\mathrm{d}t = G(x)$.
Ainsi $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = G(b) - G(a) = (F(b) - F(c)) - (F(a) - F(c)) = F(b) - F(c) - F(a) + F(c) = F(b) - F(a)$

Propriété

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

- Si $\forall x \in [a;b], f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si $\forall x \in [a;b], f(x) \leqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Exemple

Démontrer que $\int_0^1 1 - e^x\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Réponse

Soit $x \in [0;1]$.
$x \geqslant 0 \Leftrightarrow e^x \geqslant 1 \Leftrightarrow 0 \geqslant 1 - e^x \Leftrightarrow 1 - e^x \leqslant 0$
Donc $\forall x \in [0;1], 1 - e^x \leqslant 0$.
Ainsi $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}1 - e^x \leqslant 0$.

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Si $\forall x \in [a;b], f(x) \leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exemple

Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 - e^x - x \leqslant 0$.

2. En déduire que $\int_0^b 1 - e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{b^2}{2}$

Réponse

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = 1 - e^x - x$.
   f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto 1 - x$ le sont.
   $f'(x) = -e^x - 1$
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) \leqslant 0$.
   Ainsi la fonction f est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Et donc $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leqslant f(0)$.
   C'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leqslant 1 - e^0 - 0$
   Soit $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leqslant 0$

2. $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 - e^x - x \leqslant 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}_+^*, 1 - e^x \leqslant x$
   Donc $\int_0^b 1 - e^x \mathrm{d}x \leqslant \int_0^b x \mathrm{d}x$.
   Ainsi $\int_0^b 1 - e^x \mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^b$
   $\int_0^b 1 - e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2} \times 0^2$
   $\int_0^b 1 - e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{b^2}{2}$

Propriété - intégration par parties

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I.

$$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration - à connaître

Soient f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I. Soient a et b deux éléments de I.
On a donc $\forall x \in I, (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
Ou encore $\forall x \in I, f'(x)g(x) = (fg)'(x) - f(x)g'(x)$
Ainsi $\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (fg)'(t) - f(t)g'(t)\mathrm{d}t = \int_a^b (fg)'(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$
Or (fg) est une primitive de $(fg)'$
Donc $\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = [(fg)(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$
$\int_a^b f'(t)g(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\mathrm{d}t$

Exemple

Calculer $\int_0^1 te^t \mathrm{d}t$.

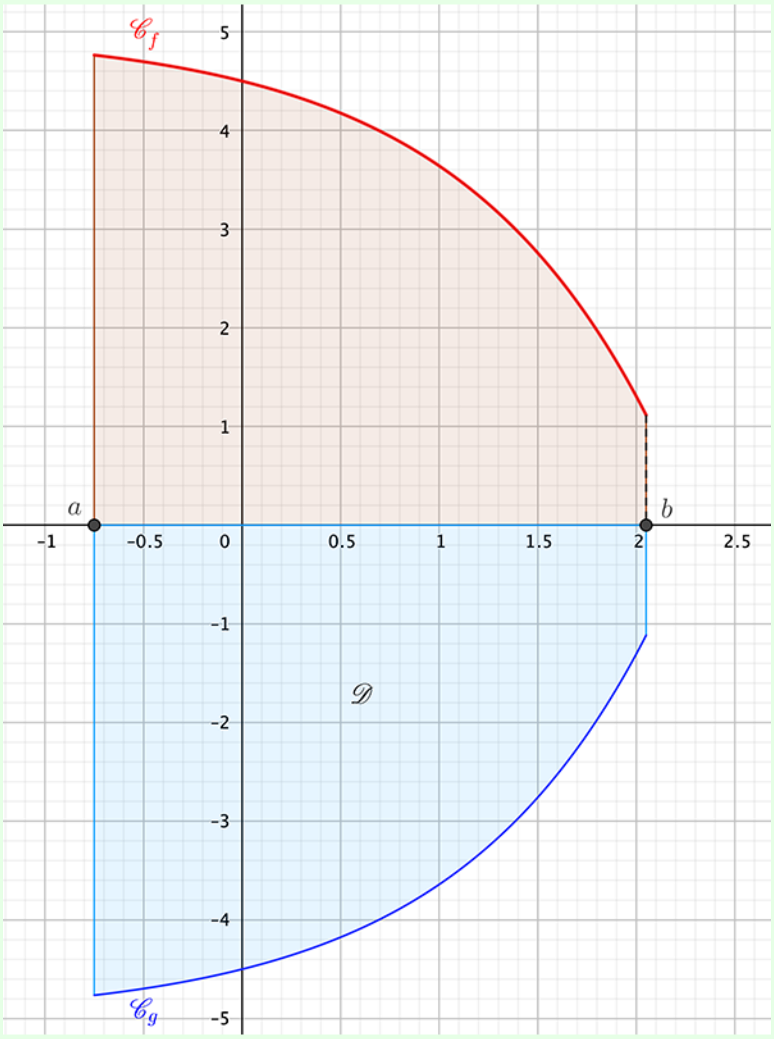
Réponse

Posons $f(t) = e^t$ et $g(t) = t$.
Donc $f'(t) = e^t$ et $g'(t) = 1$.
On a donc $\int_0^1 te^t \mathrm{d}t = \int_0^1 f'(t)g(t)\mathrm{d}t = [f(t)g(t)]_0^1 - \int_0^1 f(t)g'(t)\mathrm{d}t = [te^t]_0^1 - \int_0^1 e^t \times 1\mathrm{d}t = [1e^1 - 0e^0] - \int_0^1 e^t \mathrm{d}t$
$\int_0^1 te^t \mathrm{d}t = e - [e^t]_0^1 = e - [e^1 - e^0] = e - e + 1 = 1$

2. Aires et intégrales

Propriété

Soit g une fonction continue négative sur un intervalle $[a;b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
Soit f la fonction définie sur $[a;b]$ par $f(x) = -g(x)$.
f est donc une fonction continue positive sur $[a;b]$.



L'aire en bleue sur le graphique précédent est égale à l'aire en rouge.
Ainsi $\mathcal{A}_{bleue} = \mathcal{A}_{rouge} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b -g(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

Exemple

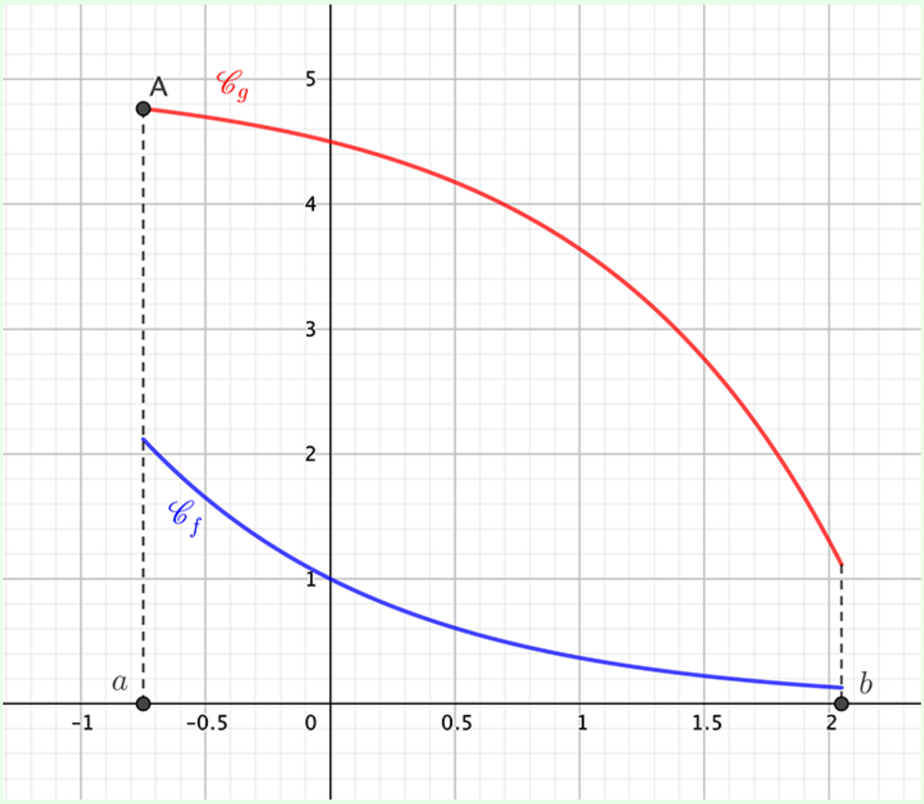
Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre l'axe des abscisse, les droites d'équation $x = 1$ et $x = 2$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f définie sur $[1; 2]$ par $f(x) = x^2 - 4$.

Réponse

$1 \leqslant x \leqslant 2 \Leftrightarrow 1 \leqslant x^2 \leqslant 4 \Leftrightarrow -3 \leqslant x^2 - 4 \leqslant 0$
Donc $\forall x \in [1; 2], f(x) \leqslant 0$
Ainsi $\mathcal{A} = -\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x = -\int_1^2 x^2 - 4\mathrm{d}x = -\left[\frac{1}{3}x^3 - 4x\right]_1^2$
$\mathcal{A} = -\left[\left(\frac{1}{3}2^3 - 4 \times 2\right) - \left(\frac{1}{3}1^3 - 4 \times 1\right)\right] = -\left[\frac{8}{3} - 8 - \frac{1}{3} + 4\right] = -\left(\frac{7}{3} - 4\right)$
$\mathcal{A} = 4 - \frac{7}{3} = \frac{12}{3} - \frac{7}{3} = \frac{5}{3}$

Propriété

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a; b]$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.
De plus, $\forall x \in [a; b], f(x) \leqslant g(x)$.
L'aire comprise entre les deux courbes et délimité par les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ vaut :
$\int_a^b g(x) - f(x)\mathrm{d}x$



Exemple

Soit f et g les fonctions définies sur $[-1;1]$ par $f(x) = 2x+1$ et $g(x) = 5 - \frac{1}{2}e^x$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que $\forall x \in [-1;1], f(x) \leqslant g(x)$.
2. Déterminer l'aire $\mathcal{A}$ comprise entre $\mathcal{C}_f$, $\mathcal{C}_g$ et les droites d'équation $x=-1$ et $x=1$.

Réponse

1. Posons $\forall x \in [-1;1], h(x) = g(x) - f(x) = 5 - \frac{1}{2}e^x - (2x+1) = 4 - 2x - \frac{1}{2}e^x$.
   h est une fonction dérivable sur $[-1;1]$ car f et g le sont.
   $h'(x) = -2 - \frac{1}{2}e^x$
   or $-1 \leqslant x \leqslant 1$
   donc $e^{-1} \leqslant e^x \leqslant e^1$
   $-e^{-1} \geqslant -e^x \geqslant -e$
   $-2 - e^{-1} \geqslant -4 - e^x \geqslant -2 - e$
   $-2 - e^{-1} \geqslant h'(x) \geqslant -2 - e$
   Ainsi $\forall x \in [-1;1], h'(x) \leqslant 0$
   Donc la fonction h est décroissante sur $[-1;1]$.
   Et donc $\forall x \in [-1;1], h(x) \geqslant h(1)$
   $\forall x \in [-1;1], h(x) \geqslant 4 - 2 \times 1 - \frac{1}{2}e^1$
   $\forall x \in [-1;1], h(x) \geqslant 2 - \frac{e}{2}$
   $\forall x \in [-1;1], h(x) \geqslant 0$
   $\forall x \in [-1;1], g(x) \geqslant f(x)$
2. $\mathcal{A} = \int_{-1}^{1} g(x) - f(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} h(x)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} 4 - 2x - \frac{1}{2}e^x\mathrm{d}x$
   $\mathcal{A} = \left[4x - x^2 - \frac{1}{2}e^x\right]_{-1}^{1} = \left(4 \times 1 - 1^2 - \frac{1}{2}e^1\right) - \left(4 \times (-1) - (-1)^2 - \frac{1}{2}e^{-1}\right)$
   $\mathcal{A} = 4 - 1 - \frac{e}{2} + 4 + 1 + \frac{1}{2e} = 8 + \frac{1}{2e} - \frac{e}{2}$

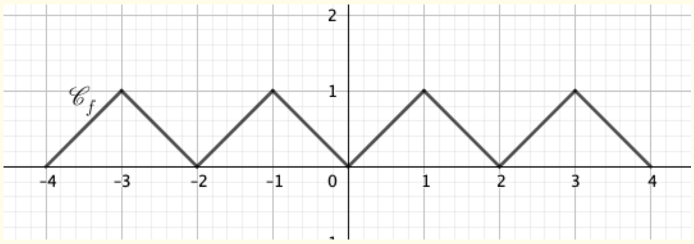
3. Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre réel μ tel que :
$\mu = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\mathrm{d}x$

Exemple

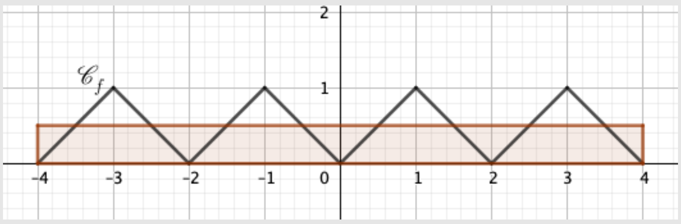
Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-4;4]$, représentée dans le repère ci-dessous.



1. Déterminer la valeur moyenne de f sur $[-4;4]$.
2. Interpréter graphiquement.

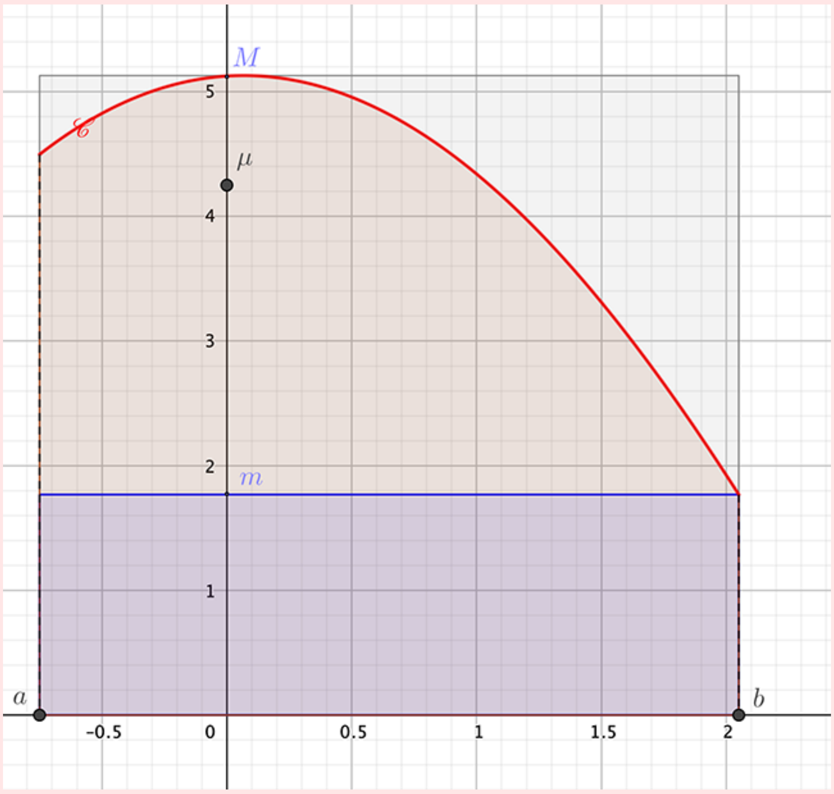
Réponse

1. $\mu = \frac{1}{4-(-4)} \int_{-4}^{4} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{8} \times 4 = \frac{1}{2}$
2. Graphiquement, l'aire sous la courbe est égale à l'aire d'un rectangle de largeur $b-a=8$ et de hauteur $\mu = \frac{1}{2}$



Remarque

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
Soient m le minimum de f sur $[a;b]$ et M le maximum de f sur $[a;b]$.
La valeur moyenne de f sur sur $[a;b]$ est comprise entre m et M : $m \leqslant \mu \leqslant M$.



On remarque $m \leqslant \mu \leqslant M$. On peut le démontrer facilement puisque l'aire du rectangle gris est inférieure ou égale à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$ et l'aire du rectangle gris est supérieure ou égale à l'aire sous la courbe $\mathcal{C}$. On peut donc écrire $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$. Soit $m \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant M$. Ou encore $m \leqslant \mu \leqslant M$.

4. Intégration par parties

Définition

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I.
Soient $a \in I$ et $b \in I$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

Démonstration

Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I.
Soient $a \in I$ et $b \in I$.

Les fonctions u et v étant dérivables sur I, le produit uv l'est aussi.
On a alors $\forall x \in I, (uv)'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
Et donc $\forall x \in I, u(x)v'(x) = (uv)'(x) - u'(x)v(x)$

Les fonctions u, v u' et v' étant continues sur I, les fonctions uv', $u'v$ et uv le sont aussi. Ainsi :
$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x) - u'(x)v(x)\mathrm{d}x = \int_a^b (uv)'(x)\mathrm{d}x - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$

Exemple

Calculer $\int_0^1 x^3e^x\mathrm{d}x$.

Réponse

Posons $u(x) = x^3$ et $v(x) = e^x$.
On a donc $u'(x) = 3x^2$ et $v(x) = e^x$
Ainsi $\int_0^1 x^3e^x\mathrm{d}x = [x^3e^x]_0^1 - \int_0^1 3x^2e^x\mathrm{d}x = 1^3e^1 - 0^3e^0 - \int_0^1 3x^2e^x\mathrm{d}x = e - 3\int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x$

Dans cette nouvelle intégrale, posons $u(x) = x^2$ et $v(x) = e^x$.
On a donc $u'(x) = 2x$ et $v(x) = e^x$
Ainsi $\int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\mathrm{d}x = 1^2 \times e^1 - 0^2 \times e^0 - \int_0^1 2xe^x\mathrm{d}x = e - 2\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$

Dans cette nouvelle intégrale, posons $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$.
On a donc $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$
Ainsi $\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 1e^x\mathrm{d}x = 1e^1 - 0e^0 - \int_0^1 e^x\mathrm{d}x = e - [e^x]_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e - e + 1 = 1$
On a alors :
$\int_0^1 x^2e^x\mathrm{d}x = e - 2 \times 1 = e - 2$
et :
$\int_0^1 x^3e^x\mathrm{d}x = e - 3 \times (e - 2) = e - 3e + 6 = 6 - 2e$

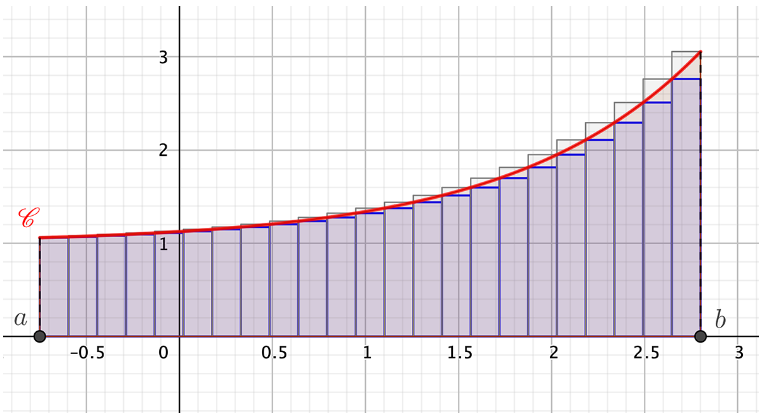
III. Algorithmes

1. Approximation d'une intégrale d'une fonction continue positive croissante par la méthode des rectangles

Soit f une fonction continue, croissante et positive sur un intervalle $[a;b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

- On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$ et on note $x_k = a + kh$ avec k un nombre entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
- Sur chaque intervalle $[x_k;x_{k+1}]$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, on construit les rectangles de hauteurs $f(x_k)$ et $f(x_{k+1})$.

On appelle s_n la somme des aires, en u.a., des rectangles bleus contenus dans le domaine sous la courbe $\mathcal{C}$.
On appelle $S_n$la somme des aires, en u.a., des rectangles gris qui contiennent le domaine sous la courbe $\mathcal{C}$.



Propriété

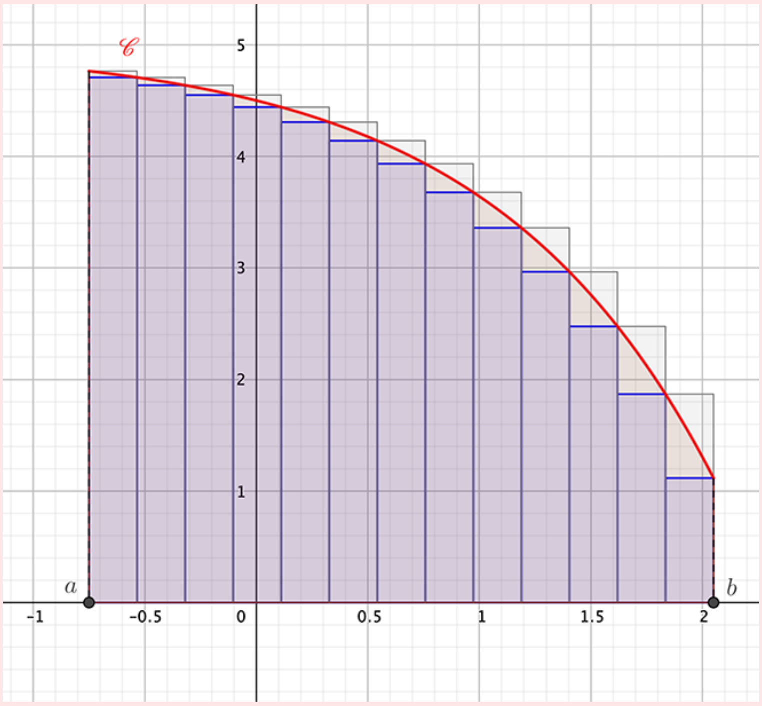
Soit f une fonction continue, croissante et positive sur un intervalle $[a;b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
$\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_n$

avec $s_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$

et $S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$

Remarque

Dans le cas où f une fonction continue, décroissante et positive sur un intervalle $[a;b]$, on échange les valeur de s_n et S_n.



Remarque

Dans le cadre de la propriété, on remarque que :
$S_n - s_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_n) - f(x_0)\right)$
Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - s_n = 0$ car $f(x_n) = M$ avec M le maximum de f sur $[a;b]$.
Ce qui veut dire que plus n augmente plus l'encadrement de $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ a une amplitude petite.
Et donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\leftarrow+\infty} s_n = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ (hors programme)

Exemple

Soit la fonction exponentielle définie sur $[0;1]$ par $f(x)=e^x$.

1. Rappeler le sens de variation de la fonction exponentielle.
2. En déduire un encadrement de $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$ par la méthode des rectangles :
   (a) en subdivisant l'intervalle en 10.
   (b) en subdivisant l'intervalle en 100.
3. Conjecturer la valeur de $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{e-1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)} \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{e-1}{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)}$.
5. (a) Démontrer que $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}=1$.
   (b) En déduire que $\lim_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=1$.
   (c) De même, démontrer que $\lim_{n\to+\infty} n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)=1$.
6. En déduire la valeur de $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x$.

Réponse

1. La fonction exponentielle est croissante sur $[0;1]$.
2. (a) De plus, $\forall x \in [0;1], e^x>0$.
   Donc d'après la méthode des rectangles,
   $s_{10} \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant S_{10}$
   avec :
   $s_{10}=\frac{1-0}{10}f(x_0)+\frac{1-0}{10}f(x_1)+...+\frac{1-0}{10}f(x_9)=\frac{1}{10}(f(x_0)+f(x_1)+...+f(x_9))$
   $S_{10}=\frac{1-0}{10}f(x_1)+\frac{1-0}{10}f(x_2)+...+\frac{1-0}{10}f(x_{10})=\frac{1}{10}(f(x_1)+f(x_2)+...+f(x_{10}))$
   $\forall k\in\mathbb{N}$, tel que $0\leqslant k\leqslant n$, $x_k=0+\frac{1-0}{10}\times k=\frac{k}{10}$
   Donc $\forall k\in\mathbb{N}$, tel que $0\leqslant k\leqslant n$, $f(x_k)=f(\frac{k}{10})=e^{\frac{k}{10}}=\left(e^{\frac{1}{10}}\right)^k$.
   Ainsi $s_{10}=\frac{1}{10}\left[\left(e^{\frac{1}{10}}\right)^0+\left(e^{\frac{1}{10}}\right)^1+...+\left(e^{\frac{1}{10}}\right)^9\right]$
   $s_{10}=\frac{\left(e^{\frac{1}{10}}\right)^{10}-1}{10\left(e^{\frac{1}{10}}-1\right)}=\frac{e-1}{10\left(e^{\frac{1}{10}}-1\right)}$
   De même, $S_{10}=e^{\frac{1}{10}}\frac{\left(e^{\frac{1}{10}}\right)^{10}-1}{10\left(e^{\frac{1}{10}}-1\right)}=\frac{e^{\frac{1}{10}}(e-1)}{10\left(e^{\frac{1}{10}}-1\right)}$
   On a donc $\frac{e-1}{10\left(e^{\frac{1}{10}}-1\right)}\leqslant\int_0^1 e^x\mathrm{d}x\leqslant\frac{e^{\frac{1}{10}}(e-1)}{10\left(e^{\frac{1}{10}}-1\right)}$

   (b) De même, on obtient :
   $\frac{e-1}{100\left(e^{\frac{1}{100}}-1\right)}\leqslant\int_0^1 e^x\mathrm{d}x\leqslant\frac{e^{\frac{1}{100}}(e-1)}{100\left(e^{\frac{1}{100}}-1\right)}$
3. Il semblerait que $\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=e-1$.

Exemple - suite

Réponse - suite

4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Subdivisons en n l'intervalle $[0;1]$.
   On a $x_k = 0 + k\frac{1-0}{n} = \frac{k}{n}$
   $s_n = \frac{1-0}{n}(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1}))$
   $s_n = \frac{1}{n}\left[\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^0 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^1 + ... + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n-1}\right]$
   $s_n = \frac{1}{n}\left(\frac{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)$
   $s_n = \frac{1}{n}\left(\frac{e-1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)$
   $s_n = \frac{e-1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}$

   $S_n = \frac{1-0}{n}(f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n))$
   $S_n = \frac{1}{n}\left[\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^1 + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^2 + ... + \left(e^{\frac{1}{n}}\right)^{n}\right]$
   $S_n = \frac{1}{n}\left(e^{\frac{1}{n}} \times \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}\right)^n - 1}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)$
   $S_n = \frac{1}{n}\left(\frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{e^{\frac{1}{n}}-1}\right)$
   $S_n = \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}$
   Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{e-1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)} \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant \frac{e-1}{n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)}$

5. (a) La fonction exponentielle est dérivable sur $[0;1]$ donc :
   $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{exp(x)-exp(0)}{x-0} = exp'(0) = exp(0) = 1$

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$ avec le changement de variable $x = \frac{1}{n}$
   et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

   (c) $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{-\frac{1}{n}}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}}$
   Or $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-\frac{1}{n}} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)}{\frac{1}{n}} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right) = 1$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} s_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e-1}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)} = e-1$
   $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}(e-1)}{n\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)} = e-1$
   Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, s_n \leqslant \int_0^1 e^x \mathrm{d}x \leqslant S_n$
   Donc $\int_0^1 e^x \mathrm{d}x = e-1$, d'après le théorème des gendarmes.

2. Estimation de l'aire sous la courbe par la méthode de Monté-Carlo

f est la fonction définie sur l'intervalle $[O;2]$ par $f(x) = e^{-x^2}$.
$\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ et $\mathcal{D}$ est le domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$ sur [O ; 2).

On note A et B les points de coordonnées respectives $(2;0)$ et $(2;1)$.

Nous allons estimer l'aire, en u.a., de $\mathcal{D}$ à l'aide de nombres aléatoires.

1. **Étudier un programme en langage Python**
   Voici une fonction `M_C` écrite en langage Python.

```
1  from math import exp
2  from random import random
3
4  def M_C(N):
5      L=0
6      for k in range(1,N+1):
7          x=2*random()
8          y=random()
9          if y<exp(-x**2):
10             L=L+1
11     S=2*L/N
12     return S
```

   Elle effectue N choix au hasard d'un point dans le rectangle $OABJ$ et compte le nombre L de points qui sont situés dans le domaine $\mathcal{D}$.
   Le rapport $\frac{L}{N}$ est alors une approximation du rapport de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ à l'aire du rectangle $OABJ$.

   (a) Que représentent les variables x et y dans le contexte de la méthode décrite ?

   (b) Expliquer le rôle de la condition $y < e^{-x}$ du test à la ligne 9 du programme.

   (c) La fonction `M_C` renvoie pour résultat le contenu de la variable S. Que représente-t-il ?

2. **Exécuter le programme**

   (a) Saisir ce programme.

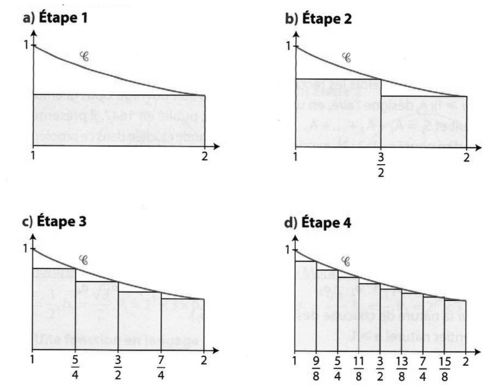
   (b) Exécuter la fonction avec des valeurs du paramètre N de plus en plus grandes.
   Comparer les résultats à la valeur de $\int_0^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x$ donnée par la calculatrice ci-dessous :

$\int_0^2 e^{-x^2}\mathrm{d}x$
0.8820813908

3. Quadrature de l'hyperbole par la méthode de Brouncker

f est la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}$.
$\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
Nous allons estimer $ln(2)$ en utilisant l'aire sous une hyperbole.

1. **Premières étapes**
   À l'étape $i (i \in \{1;2;3;4\})$, S_i désigne la somme des aires, en u.a., des rectangles colorés sur la figure correspondante.



   Justifier que :

   - $S_1 = \frac{1}{1\times 2}$
   - $S_2 = S_1 + \frac{1}{3\times 4}$
   - $S_3 = S_2 + \frac{1}{5\times 6} + \frac{1}{7\times 8}$
   - $S_4 = S_3 + \frac{1}{9\times 10} + \frac{1}{11\times 12} + \frac{1}{13\times 14} + \frac{1}{15\times 16}$

2. **Une fonction en langage Python**
   On poursuit la construction précédente, on admet que l'on obtient pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $S_n = \frac{1}{1\times 2} + \frac{1}{3\times 4} + \frac{1}{5\times 6} + ... + \frac{1}{(2^n-1)\times 2^n}$.

   (a) Justifier que la suite (S_n) converge vers $ln(2)$.

   (b) Voici une fonction `Br()` écrite en langage Python.

```
def Br(n):
    S=0
    for k in range(2,2**n+1,2):
        S=S+1/((k-1)*k)
    return S
```

   Expliquer pourquoi, pour une valeur donnée du paramètre n, la fonction 'Br()' renvoie pour résultat S_n.

   (c) Saisir et exécuter cette fonction pour les valeurs suivantes du paramètre :

   - $n = 5$
   - $n = 10$
   - $n = 20$

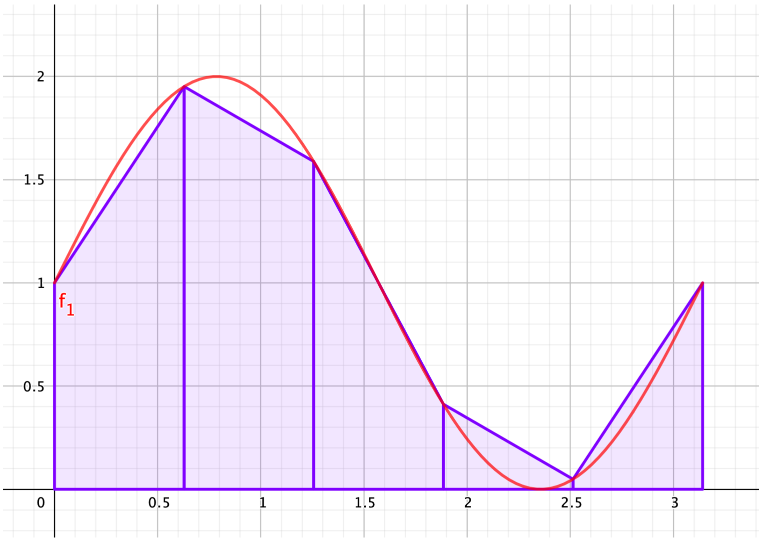
4. Approximation de l'aire sous la courbe : méthode des trapèzes

Soit f une fonction continue, croissante et positive sur un intervalle $[a;b]$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $a < b$.
Soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$.

La méthode des trapèzes est définie par l'algorithme suivant :

- On subdivise l'intervalle $[a;b]$ en n intervalles de même longueur $h = \frac{b-a}{n}$ et on note $x_k = a + kh$ avec k un nombre entier tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.
- Sur chaque intervalle $[x_k;x_{k+1}]$ ($0 \leqslant k \leqslant n-1$), on construit les trapèzes $A_kA_{k+1}P_{k+1}P_k$ avec $A_k\,(x_k;0)$, $A_{k+1}\,(x_{k+1};0)$, $P_k\,(x_k;f(x_k))$ et $P_{k+1}\,(x_{k+1};f(x_{k+1}))$.

On appelle S_n la somme des aires, en u.a., des trapèzes.



Exemple pour $n = 5$ avec la fonction $x \mapsto 1 + sin(x)$

Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = x^2 + 1$.

1. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.
2. Appliquer la méthode des trapèzes dans les trois cas suivants :
   - Cas $n = 2$
   - Cas $n = 5$
   - Cas $n = 10$
3. Conjecturer la limite de S_n quand n tend vers $+\infty$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $k \in [\![0;n-1]\!]$.
   (a) Exprimer $f(x_k)$ en fonction de n et k.
   (b) Exprimer $f(x_{k+1})$ en fonction de n et k.
   (c) Démontrer que l'aire du trapèze $A_kA_{k+1}P_{k+1}P_k$ est $\mathcal{A}_k = \frac{1}{n} + \frac{k^2}{2n^3} + \frac{(k+1)^2}{2n^3}$
   (d) On admet que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
   Démontrer que $S_n = 1 - \frac{1}{2n} + \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.
   (e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Vérifier la conjecture de la question 2.

IV. Approfondissement

1. Approximation d'une aire par l'utilisation de suites adjacentes

On rappelle qu'avec la méthode des rectangles, pour une fonction f décroissante, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n \leqslant \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant s_n$

avec $s_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_0) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)$

et $S_n = \frac{b-a}{n}\left(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)\right) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$

et $x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}$ pour $k \in [\![0; n]\!]$.

Soit f la fonction définie sur $[1;2]$ par $f(x) = \frac{1}{x}$.
On découpe l'intervalle $[1;2]$ en n intervalles de même amplitude afin d'utiliser la méthode des rectangles.

1. Déterminer les expressions simplifiées de s_n et S_n en fonction de n.
2. Démontrer que les suites (s_n) et (S_n) sont adjacentes.
3. Démontrer que les suites (s_n) et (S_n) ont pour limite $\ln(2)$.

Réponse

1. On a $\forall k \in [\![0; n]\!], x_k = a + \frac{k(b-a)}{n} = 1 + \frac{k(2-1)}{n} = 1 + \frac{k}{n} = \frac{n+k}{n}$
$s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k) = \dfrac{2-1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{x_k} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{\frac{n+k}{n}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{n}{n+k} = \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \ldots + \dfrac{1}{n+n-1}$
$S_n = \dfrac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \dfrac{2-1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{x_k} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{\frac{n+k}{n}} = \dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{n}{n+k} = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{n+n}$
2. Soit $n \in \mathbb{N}$.
$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{n+1+k} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} = \sum_{k=2}^{n+2}\dfrac{1}{n+k} - \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n+n+2} + \dfrac{1}{n+n+1} - \dfrac{1}{n+1}$
$S_{n+1} - S_n = \dfrac{1}{2n+2} + \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{2}{2n+2} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$
Or $0 < 2n+1 < 2n+2$ donc $\frac{1}{2n+1} > \frac{1}{2n+2}$ soit encore $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} > 0$
Donc $S_{n+1} - S_n > 0$.
La suite (S_n) est donc croissante.

   $s_{n+1} - s_n = \sum_{k=0}^{n}\dfrac{1}{n+1+k} - \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{n+k} = \sum_{k=1}^{n+1}\dfrac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n+n+1} + \dfrac{1}{n+n} - \dfrac{1}{n}$
$s_{n+1} - s_n = \dfrac{1}{2n+1} + \dfrac{1}{2n} - \dfrac{2}{2n} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n}$
Or $0 < 2n < 2n+1$ donc $\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n+1}$ soit encore $\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n} < 0$
Donc $s_{n+1} - s_n < 0$.
La suite (s_n) est donc décroissante.

   $S_n - s_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{n+k} = \dfrac{1}{n+n} - \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{2}{2n} = -\dfrac{1}{2n}$
Or $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2n} = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n - s_n = 0$.

   Ainsi les suites (S_n) et (s_n) sont adjacentes.

Réponse - suite

3. Les suites (s_n) et (S_n) sont adjacentes donc convergentes et ont la même limite ℓ.
La fonction f est décroissante donc $S_n \leqslant \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x \leqslant s_n$
Soit $S_n \leqslant \int_1^2 \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leqslant s_n$
$S_n \leqslant [\ln(x)]_1^2 \leqslant s_n$
$S_n \leqslant \ln(2) - \ln(1) \leqslant s_n$
$S_n \leqslant \ln(2) \leqslant s_n$
Par passage à la limite, on obtient $\ell \leqslant \ln(2) \leqslant \ell$ soit encore $\ln(2) \leqslant \ell \leqslant \ln(2)$
Donc $\ell = \ln(2)$
Ainsi les suites (S_n) et (s_n) convergent vers $\ln(2)$.

2. Encadrement de $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ par des intégrales

Soit $n \in \mathbb{N}$.
Soit $H_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
$\forall t \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leqslant \frac{1}{t} \leqslant \frac{1}{k}$
Donc $\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\mathrm{d}t$
$\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1} 1\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}\int_k^{k+1} 1\mathrm{d}t$
$\frac{1}{k+1}[t]_k^{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}[t]_k^{k+1}$
$\frac{1}{k+1}[k+1-k] \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}[k+1-k]$
$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k}$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{k} \implies \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \implies \int_1^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant H_n$$
$$\frac{1}{k+1} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \implies \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \implies \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \implies H_n - \frac{1}{1} \leqslant \int_1^{n} \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$
$\implies H_n - 1 \leqslant \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t \implies H_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t$

Ainsi $\int_1^{n+1} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant H_n \leqslant 1 + \int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t$
$[\ln(t)]_1^{n+1} \leqslant H_n \leqslant 1 + [\ln(t)]_1^n$
$\ln(n+1) - \ln(1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n) - \ln(1)$
$\ln(n+1) \leqslant H_n \leqslant 1 + \ln(n)$

On peut donc conclure que la suite (H_n) est divergente car $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+1) = +\infty$