Chapitre XIII - Fonctions sinus et cosinus

Rémi Caneri

Table des matières

I. Fonctions trigonométriques sinus et cosinus

1. Rappels

Propriété

$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$:

- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$
- $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

Tableau des valeurs usuelles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Propriété

$\forall x \in \mathbb{R}$:

- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

Propriété

Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \\ \cos\{x + 2\pi) = \cos(x) \end{cases}$$

Propriété

La fonction sinus est impaire, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$
La fonction cosinus est paire, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$

Propriété

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$:

- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

Propriété

$\forall a \in \mathbb{R}$:

- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2$

2. Limites

Propriété - admise

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Propriété - admise

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

3. Continuité

Propriété - admise

Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.

Remarque

Les fonctions sinus et cosinus étant continues et 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$, il suffit de les étudier sur un intervalle de longueur 2π, $]-\pi;\pi]$ par exemple.
La fonction sinus étant impaire et la fonction cosinus paire, on peut réduire cet intervalle de moitié. Il suffit donc de les étudier sur l'intervalle $[0;\pi]$.

4. Signe de $\cos(x)$ et de $\sin(x)$

Propriété

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$+$	1	$+$	0
$\cos(x)$	1	$+$	0	$-$	-1

Démonstration

L'utilisation du cercle trigonométrique permet de démontrer ce résultat.

5. Dérivées

Propriété

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x) \text{ et } \cos'(x) = -\sin(x)$$

Demonstration

$\forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = \frac{\sin(h)}{h}$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h} = 0$

Ainsi la fonction sin est dérivable en 0 et $\sin'(0) = 1$

$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}, \frac{\cos(0+h)-\cos(0)}{h} = \frac{\cos(h)-1}{h} = \frac{\sqrt{1-\sin^2(h)}-1}{h} = \frac{(\sqrt{1-\sin^2(h)}-1)(\sqrt{1-\sin^2(h)}+1)}{h(\sqrt{1-\sin^2(h)}+1)} = \frac{1-\sin^2(h)-1}{h\left(\sqrt{1-\sin^2(h)}+1\right)}$

$\forall h \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\setminus \{0\}, \frac{\cos(0+h)-\cos(0)}{h} = -\sin(h)\frac{\sin(h)}{h}\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(h)}+1}$

Or $\lim\limits_{h\to 0} \sqrt{1-\sin^2(h)}+1 = 2$ et $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(0+h)-\cos(0)}{h} = 0$

Ainsi le fonction cos est dérivable en 0 et $\cos'(0) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \frac{\sin(x)\cos(h)+\cos(x)\sin(h)-\sin(x)}{h} = \sin(x)\frac{\cos(h)-1}{h} + \cos(x)\frac{\sin(h)}{h}$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x) \in \mathbb{R}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} = \cos(x) \in \mathbb{R}$

La fonction sin est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\sin' = \cos$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\forall h \in \mathbb{R}^*, \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = \frac{\cos(x)\cos(h)-\sin(x)\sin(h)-\cos(x)}{h} = \cos(x)\frac{\cos(h)-1}{h} - \sin(x)\frac{\sin(h)}{h}$

Donc $\lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\sin(x) \in \mathbb{R}$

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \lim\limits_{h\to 0} \frac{\cos(x+h)-\cos(x)}{h} = -\sin(x) \in \mathbb{R}$

La fonction cos est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\cos' = -\sin$

6. Variations

Propriété

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\cos(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Démonstration

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $[0;\pi]$ et

$$\forall x \in [0;\pi], \sin'(x) = \cos(x) \text{ et } \cos'(x) = -\sin(x)$$

On a donc :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\cos(x)$	1	$+$	0	$-$	-1
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

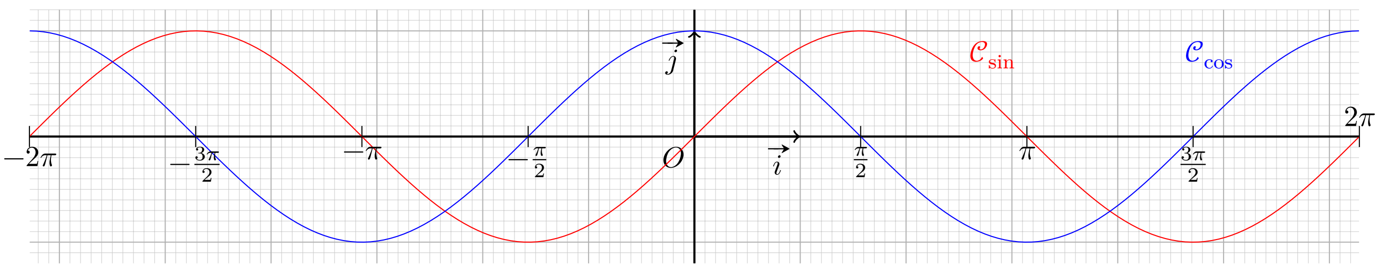
et

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-\sin(x)$	0	$-$	1	$-$	0
$\cos(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

Par parité, on retrouve :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0
$\cos(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\searrow$	-1

7. Courbes représentatives



II. Résolution d'équations et d'inéquations

Définition

Soit $a \in [-1;1]$.

- le nombre $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = a$ est appelé arcsinus de a.
  On note $x = \arcsin(a)$.
- le nombre $x \in [0;\pi]$ tel que $\cos(x) = a$ est appelé arccosinus de a.
  On note $x = \arccos(a)$.

Exemple

$\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ donc $\frac{\pi}{6} = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$
$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc $\frac{\pi}{4} = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Propriété

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], x = \arcsin(\sin(x))$$
$$\forall x \in [0;\pi], x = \arccos(cos(x))$$
$$\forall a \in [-1;1], a = \sin(\arcsin(a))$$
$$\forall a \in [-1;1], a = \cos(\arccos(a))$$

Propriété

Soit $a \in [-1;1]$

- Les solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'équation $\sin(x) = a$ sont $\arcsin(a)$ et $\pi - \arcsin(a)$
- Les solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'équation $\cos(x) = a$ sont $\arccos(a)$ et $-\arccos(a)$
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = a$ sont les nombres de l'ensemble
  $\{\arcsin(a) + k \times 2\pi, \pi - \arcsin(a) + k \times 2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x) = a$ sont les nombres de l'ensemble
  $\{\arccos(a) + k \times 2\pi, -\arccos(a) + k \times 2\pi || k \in \mathbb{Z}\}$

Exemple

Résoudre dans $[-\pi;\pi]$ les équations suivantes :

- $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Réponse

- $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ ou $x = \pi - \arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \iff x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$
  $\mathcal{S} = \left\{\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right\}$
- $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ou $x = -\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \iff x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = -\frac{\pi}{4}$
  $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right\}$

Propriété

Soit $a \in [-1; 1]$

- Les solutions sur $[-\pi; \pi]$ de l'inéquation $\sin(x) \leqslant a$ sont les éléments de l'intervalle $[-pi; \arcsin(a)] \cup [\pi - arcsin(a); \pi]$
- Les solutions sur $[-\pi; \pi]$ de l'inéquation $\cos(x) \leqslant a$ sont les éléments de l'intervalle $[-\pi; -\arccos(a)] \cup [\arccos(a); \pi]$
- Les solutions sur $[-\pi; \pi]$ de l'inéquation $\sin(x) \geqslant a$ sont les éléments de l'intervalle $[\arcsin(a); \pi - arcsin(a)]$
- Les solutions sur $[-\pi; \pi]$ de l'inéquation $\cos(x) \geqslant a$ sont les éléments de l'intervalle $[-\arccos(a); \arccos(a)]$

Exemple

Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ les inéquations suivantes :

- $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$

Réponse

- $\sin(x) \leqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left[-\pi; arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] \cup \left[\pi - arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \pi\right] \iff x \in [-\pi; \frac{\pi}{3}] \cup [\pi - \frac{\pi}{3}; \pi]$
  $\iff x \in [-\pi; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi]$
  $\mathcal{S} = [-\pi; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi]$
- $\cos(x) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in \left[-arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right); arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right] \iff x \in [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$
  $\mathcal{S} = [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$

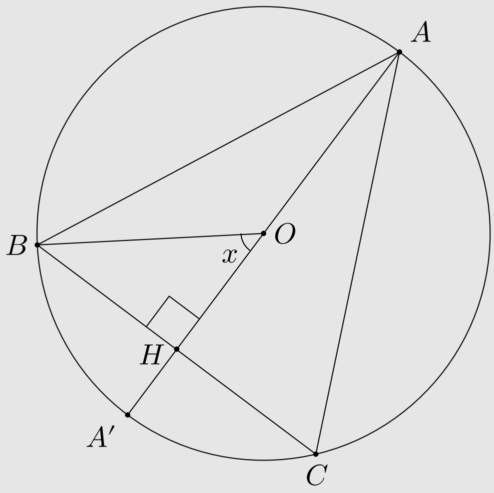
III. Un Problème

Exemple

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O et de rayon 1. Soit A un point fixe du cercle $\mathcal{C}$.
On considère deux points B et C variables du cercle $\mathcal{C}$ tels que le triangle ABC soit isocèle en A.
Soit H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A.
On note $x = \widehat{HOB}$ avec $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ (donc en radians).

1. (a) Exprimer les longueurs BC et AH en fonction de $\sin(x)$ et $\cos(x)$.
   (b) En déduire l'aire $S(x)$ du triangle ABC, en unité d'aire.
2. Montrer que $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], S'(x) = (1 + \cos(x))(2\cos(x) - 1)$
3. Dresser le tableau de signes de $S'(x)$ et de variations de la fonction S.
4. Pour quelle valeur de x l'aire du triangle ABC est-elle maximale ? Donner alors l'aire maximale.
   Quelle est alors la nature du triangle ABC

Réponse



1. (a) Le triangle BHC est rectangle en H donc $\frac{BH}{BO} = \sin(x)$
   $\frac{BH}{1} = \sin(x) \iff BH = \sin(x)$.
   Le triangle ABC étant isocèle en A, la hauteur issue A du triangle ABC est aussi médiatrice.
   Ainsi $BC = 2BH = 2\sin(x)$

   Le triangle BHC est rectangle en H donc $\frac{OH}{BO} = \cos(x)$
   $\frac{OH}{1} = \cos(x) \iff OH = \cos(x) \iff AH = AO + OH = 1 + \cos(x)$

   (b) $S(x) = \frac{AH \times BC}{2} = \frac{(1+\cos(x))\times 2\sin(x)}{2} = \sin(x)(1+\cos(x))$

2. Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc S l'est aussi comme produit de fonctions dérivables sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
   $S'(x) = \cos(x)(1+\cos(x)) + \sin(x)(-\sin(x)) = \cos(x)(1+\cos(x)) - \sin(x)^2$
   $S'(x) = \cos(x)(1+\cos(x)) - (1-\cos(x)^2) = \cos(x)(1+\cos(x)) - (1-\cos(x))(1+\cos(x))$
   $S'(x) = (1+\cos(x))(\cos(x) - (1-\cos(x))) = (1+\cos(x))(\cos(x) - 1 + \cos(x))$
   $S'(x) = (1+\cos(x))(2\cos(x)-1)$

3. $\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos(x) \geqslant 0 \iff \forall x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \cos(x) + 1 \geqslant 1$
   $2\cos(x) - 1 \geqslant 0 \iff 2\cos(x) \geqslant 1 \iff \cos(x) \geqslant \frac{1}{2} \iff x \in \left[-\arccos\left(\frac{1}{2}\right); \arccos\left(\frac{1}{2}\right)\right]$
   $\iff x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$
   Or $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $2\cos(x) - 1 \geqslant 0 \iff x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \cap \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{3}\right]$

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$1+\cos(x)$		$+$		$+$	
$2\cos(x)-1$		$+$	0	$-$	
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
S	0	$\nearrow$	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	1

Réponse - suite

4. L'aire du triangle ABC est maximale pour $x = \frac{\pi}{3}$. L'aire est alors égale à $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.
Dans le cercle $\mathcal{C}$ de centre O, appelons A' le point du cercle diamétralement opposé au point A.
L'angle $\widehat{A'OB}$ est un angle au centre interceptant l'arc $\overset{\frown}{A'B}$.
L'angle $\widehat{A'AB}$ est un angle inscrit interceptant l'arc $\overset{\frown}{A'B}$.
Donc $\widehat{A'AB} = \frac{1}{2}\widehat{A'OB} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.
Or le triangle ABC est isocèle en A donc la hauteur issue de A est aussi bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.
Ainsi $\widehat{BAC} = 2\widehat{A'AB} = 2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$
Le triangle ABC est donc un triangle isocèle ayant un angle de $\frac{\pi}{3}$ radians. C'est donc un triangle équilatéral.

IV. Approfondissement

1. La fonction tangente

Définition

La fonction tangente, notée tan est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ par $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

Tableau des valeurs usuelles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Propriété

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- $\tan(-x) = -\tan(x)$
- $\tan(\pi + x) = \tan(x)$
- $\tan(\pi - x) = -\tan(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{1}{\tan(x)} = \text{cotan}(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\frac{1}{\tan(x)} = -\text{cotan}(x)$

Démonstration

Soit $x \in \mathbb{R}$:

- $\tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$
- $\tan(\pi + x) = \frac{\sin(\pi+x)}{\cos(\pi+x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$
- $\tan(\pi - x) = \frac{\sin(\pi-x)}{\cos(\pi-x)} = \frac{\sin(x)}{-\cos(x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$
- $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}{\cos(\frac{\pi}{2}-x)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \frac{1}{\tan(x)} = \text{cotan}(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}+x)} = \frac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -\frac{\cos(x)}{\sin(x)} = -\frac{1}{\tan(x)} = -\text{cotan}(x)$

Propriété

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ et π-périodiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}, \tan(x + \pi) = \tan(x)$$

Démonstration

$\forall x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}, \cos(x) = 0$
Donc la fonction tangente n'est pas définie en les points de $\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}, \cos(x) = 0$
$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}, \cos(x) \neq 0$ et $\sin(x) \in \mathbb{R}$
Donc la fonction tangente est définie sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.
$\tan(\pi + x) = \frac{\sin(pi+x)}{\cos(\pi+x)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$
Donc la fonction tangente est π-périodique.

Propriété

La fonction tangente est impaire, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}, \tan(-x) = -\tan(x)$

Démonstration

On a démontré précédemment que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}, \tan(-x) = -\tan(x)$

Propriété

$\forall a \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}, \forall b \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$,
tels que $a + b \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $a - b \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$:

- $\tan(a + b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
- $\tan(a - b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $b \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$,
tels que $a+b \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ et $a-b \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.

- $\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)} = \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}} = \frac{\frac{\sin(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}+\frac{\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}{\frac{\cos(a)\cos(b)}{\cos(a)\cos(b)}-\frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)}}$
  $\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)}+\frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1+\frac{\sin(a)}{\cos(a)}\frac{\sin(b)}{\cos(b)}} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$
- $\tan(a-b) = \tan(a+(-b)) = \frac{tan(a)+\tan(-b)}{1+\tan(a)\tan(-b)} = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$

Propriété

$\forall a \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ tel que $2a \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$:

$$\tan(2a) = \frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2}$$

Démonstration

Soient $a \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$ tel que $2a \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi | k \in \mathbb{Z}\right\}$.
$\tan(2a) = \tan(a+a) = \frac{\tan(a)+\tan(a)}{1-\tan(a)\tan(a)} = \frac{2\tan(a)}{1-\tan(a)^2}$

Propriété

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

Démonstration

$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x\cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\sin(x)}{x}}{\cos(x)} = \frac{1}{1} = 1$

Propriété - admise

La fonction tangente est continue sur tous les intervalles de la forme $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi ; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque

La fonction tangente étant π-périodique, il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur π, $\left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[$ par exemple.
De plus elle est impaire, donc on peut restreindre son étude à l'intervalle $\left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$

Signe de $\tan(x)$

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$		$-$	0	$+$	

Démonstration

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	-1	$+$	0	$+$	1
$\cos(x)$	0	$+$	1	$+$	0
$\tan(x)$	‖	$+$	0	$+$	‖

Propriété

La fonction tangente est dérivable sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos(x)^2} = 1 + (\tan(x))^2$$

Démonstration

On rappelle que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur l'intervalles $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.
De plus, la fonction cosinus ne s'annule pas sur cet intervalle.
Donc la fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

$\tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\times(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} = \frac{(\sin(x))^2+(\cos(x))^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$ De plus, $\tan'(x) = \frac{(\sin(x))^2+(\cos(x))^2}{\cos(x)^2} = \frac{(\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} + \frac{(\cos(x))^2}{(\cos(x))^2} = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2 + 1 = 1 + (\tan(x))^2$

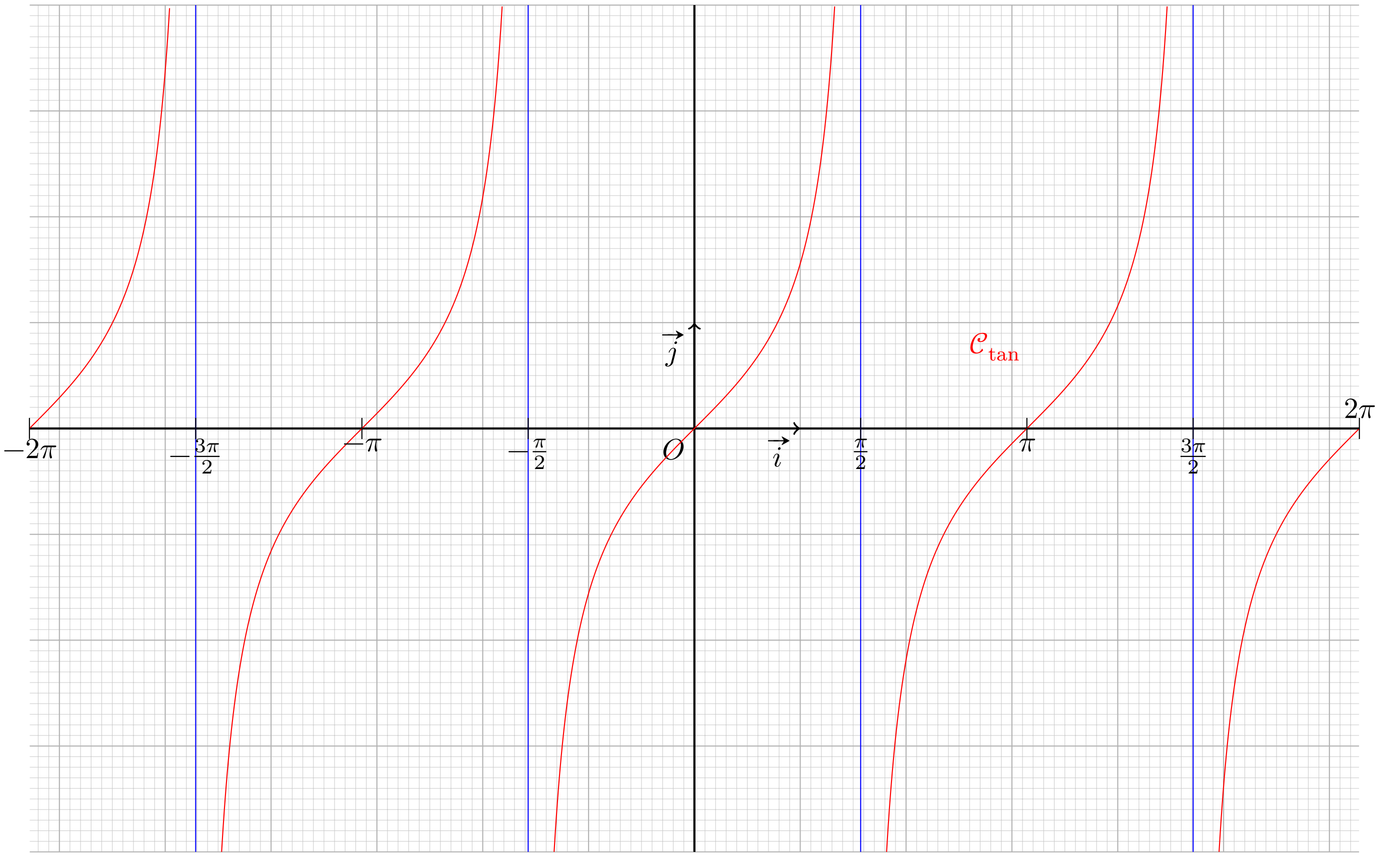
Propriété

La fonction tangente est croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et

Démonstration

x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$1 + (\tan(x))^2$	‖	$+$	1	$+$	‖
$\tan'(x)$	‖	$+$	1	$+$	‖
$\tan(x)$	‖ $-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$ ‖

Courbe représentative



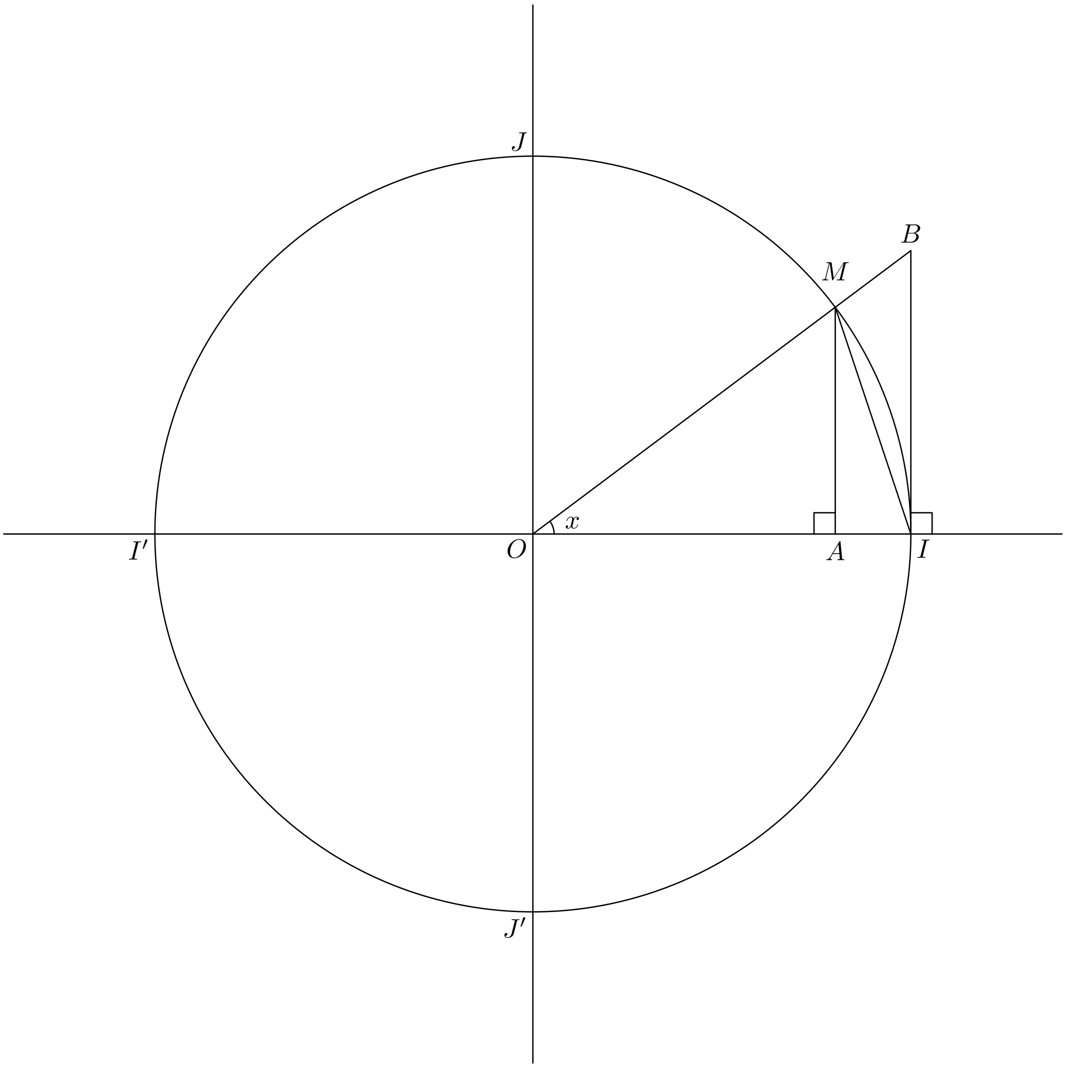
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{sin(x)}{x}$

Dans un repère orthonormé (O, I, J), considérons un cercle trigonométrique de centre O.

Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Soit M le point du cercle trigonométrique tel que $\left(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}\right) = x$.
Soit A le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses. Soit I le point de coordonnées $(1, 0)$.
Soit B le point de la demi-droite $[0M)$ tel que I soit le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses.



L'aire du secteur de disque d'angle x, notée $\mathcal{A}(x)$ est comprise entre l'aire du triangle OMI et celle du triangle OBI.
Donc on a :
$\mathcal{A}_{OMI} \leqslant \mathcal{A}(x) \leqslant \mathcal{A}_{OBI}$
$\frac{1\times|\sin(x)|}{2} \leqslant \frac{\pi\times|x|}{2\pi} \leqslant \frac{1\times|\tan(x)|}{2}$
$|\sin(x)| \leqslant |x| \leqslant |\tan(x)|$
$1 \leqslant \frac{|x|}{|\sin(x)|} \leqslant \frac{|\tan(x)|}{|\sin(x)|}$
$1 \leqslant \frac{|x|}{|\sin(x)|} \leqslant \frac{1}{|\cos(x)|}$
$1 \geqslant \frac{|\sin(x)|}{|x|} \geqslant |\cos(x)|$
Or $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \frac{|\sin(x)|}{|x|} = \frac{\sin(x)}{x}$ et $|\cos(x)| = \cos(x)$
Donc $1 \geqslant \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \cos(x)$
Par passage à la limite, on a :
$1 \geqslant \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \geqslant \lim\limits_{x\to 0} \cos(x)$
Or $\lim\limits_{x\to 0} \cos(x) = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$

f est donc prolongeable par continuité en 0.
Le prolongement par continuité de f en 0 est $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-\cos(0)}{x-0} = \cos'(0) = -\sin(0) = 0$

4. Fonctions réciproques des fonctions trigonométriques

Définition

Soit $a \in [-1;1]$.

- le nombre $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = a$ est appelé arcsinus de a.
  On note $x = \arcsin(a)$.
- le nombre $x \in [0;\pi]$ tel que $\cos(x) = a$ est appelé arccosinus de a.
  On note $x = \arccos(a)$.
- le nombre $x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ tel que $\tan(x) = a$ est appelé arctangente de a.
  On note $x = \arctan(a)$.

Exemple

- $\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ car $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}$ car $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ car $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$

Définition

- La fonction $x \in [-1;1] \mapsto \arcsin(x) \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ est appelée fonction arcsinus.
- La fonction $x \in [-1;1] \mapsto \arccos(x) \in [0;\pi]$ tel que $\cos(x) = a$ est appelée fonction arccosinus.
- La fonction $x \in]-\infty;+\infty[\mapsto \arctan(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ est appeléz fonction arctangente.

Propriété

- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \arcsin(\sin(x)) = x$
- $\forall x \in [-1;1], \sin(\arcsin(x)) = x$
- $\forall x \in [0;\pi], \arccos(\cos(x)) = x$
- $\forall x \in [-1;1], \cos(\arccos(x)) = x$
- $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \arctan(\tan(x)) = x$
- $\forall x \in [-\infty;+\infty], \tan(\arctan(x)) = x$

Propriété

Les fonctions arcsinus et arctangente sont impaires.
La fonction arccos n'est pas paire.

Démonstration

L'intervalle $[-1;1]$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in [-1;1]$.
Soit $a \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ tel que $\sin(a) = x$
On a donc $a = \arcsin(x)$
$-x \in [-1;1]$ donc :
$\sin(\arcsin(-x)) = -x = -\sin(a) = \sin(-a)$ car la fonction sinus est impaire.
Donc $\arcsin(-x) = \arcsin(\sin(-a)) = -a = -\arcsin(x)$
Ainsi $\forall x \in [-1;1], \arcsin(-x) = -\arcsin(x)$
La fonction arcsinus est donc impaire.

L'intervalle $[-\infty;+\infty]$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in [-\infty;+\infty]$.
Soit $a \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$ tel que $\tan(a) = x$
On a donc $a = \arctan(x)$
$-x \in [-\infty;+\infty]$ donc :
$\tan(\arctan(-x)) = -x = -\tan(a) = \tan(-a)$ car la fonction tangente est impaire.
Donc $\arctan(-x) = \arctan(\tan(-a)) = -a = -\arctan(x)$
Ainsi $\forall x \in [-\infty;+\infty], \arctan(-x) = -\arctan(x)$
La fonction arcsinus est donc impaire.

L'intervalle $[-1;1]$ est symétrique par rapport à 0.
Soit $x \in [-1;1]$.
Soit $a \in [0;\pi]$ tel que $\cos(a) = x$
On a donc $a = \arccos(x)$
$-x \in [-1;1]$ donc :
$\cos(\arccos(-x)) = -x = -\cos(a) = \cos(\pi - a)$
Donc $\arccos(-x) = \arccos(\cos(\pi - a)) = \pi - a = \pi - \arccos(x) \neq \arccos(x)$
Ainsi la fonction arccos n'est pas paire.

Propriété

$\forall x \in [-1;1]$:

- $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$
- $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
- $\sin(\arcsin(x)) = x$
- $\cos(\arccos(x)) = x$
- $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- $\tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $\tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

$\forall x \in [-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$:

- $\arcsin(\sin(x)) = x$
- $\arctan(\tan(x)) = x$

$\forall x \in [0;\pi]$:

- $\arccos(\cos(x)) = x$

$\forall x \in]-\infty;+\infty[$:

- $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
- $\tan(\arctan(x)) = x$
- $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Démonstration

Soit $x \in [-1;1]$.

- La fonction arcsinus est impaire donc $\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$
- On a vu dans la démonstration précédente : $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$
- Par définition, $\sin(\arcsin(x)) = x$
- Par définition, $\cos(\arccos(x)) = x$
- D'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a :
  $\forall a \in \mathbb{R}, \sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$
  En particulier pour $a = \arccos(x)$, on a :
  $\sin^2(\arccos(x)) + \cos^2(\arccos(x)) = 1$
  $\sin^2(\arccos(x)) + x^2 = 1$
  $\sin^2(\arccos(x)) = 1 - x^2 \geqslant 0$
  $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- Démonstration analogue pour $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$
- $\tan(\arccos(x)) = \frac{\sin(\arccos(x))}{\cos(\arccos(x))} = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$
- $\tan(\arcsin(x)) = \frac{\sin(\arcsin(x))}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$
- Posons $\arcsin(x) + \arccos(x) = A$
  $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ et $\arccos(x) \in [0;\pi]$ donc
  $\arcsin(x) + \arccos(x) \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

  $\cos(A) = \cos(\arcsin(x) + \arccos(x)) = \cos(\arcsin(x))\cos(\arccos(x)) - \sin(\arcsin(x))\sin(\arccos(x))$
  $\cos(A) = \sqrt{1-x^2}x - x\sqrt{1-x^2} = 0$

  $\sin(A) = \sin(\arcsin(x) + \arccos(x)) = \sin(\arcsin(x))\cos(\arccos(x)) + \sin(\arccos(x))\cos(\arcsin(x))$
  $\sin(A) = x \times x + \sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-x^2} = x^2 + 1 - x^2 = 1$

  On cherche donc $A \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$ tel que $\cos(A) = 0$ et $\sin(A) = 1$.
  Donc $A = \frac{\pi}{2}$
  Ainsi $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$

Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

- Par définition, $\arcsin(\sin(x)) = x$
- Par définition, $\arctan(\tan(x)) = x$

Soit $x \in [0;\pi]$.

- Par définition, $\arccos(\cos(x)) = x$

Démonstration - suite

Soit $x \in]-\infty;+\infty[$:

- La fonction arctangente est impaire donc $\arctan(-x) = -\arctan(x)$
- Par définition, $\tan(\arctan(x)) = x$
- D'après la relation fondamentale de la trigonométrie, on a :
  $\forall a \in \mathbb{R}, \sin^2(a) + \cos^2(a) = 1$
  En particulier pour $a = \arctan(x)$, on a :
  $\sin^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x)) = 1$
  De plus $x = \tan(\arctan(x)) = \frac{\sin(arctan(x))}{\cos(\arctan(x))}$
  Donc $\sin(\arctan(x)) = x\cos(\arctan(x))$

  Ainsi $(x\cos(\arctan(x)))^2 + \cos^2(\arctan(x)) = 1$
  $x^2\cos^2(\arctan(x)) + \cos^2(\arctan(x)) = 1$
  $(1+x^2)\cos^2(\arctan(x)) = 1$
  $\cos^2(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2} \geqslant 0$
  $\cos(\arctan(x)) = \sqrt{\frac{1}{1+x^2}}$
  $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
- $\sin(\arctan(x)) = x\cos(\arctan(x)) = x \times \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$