Chapitre XIV - Sommes de variables aléatoires

Rémi Caneri

Table des matières

I. Somme de deux variables aléatoires

1. Généralités

Définition

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ et Y prend les valeurs y_1, y_2, y_p avec n et p deux entiers naturels non nuls.
La variable aléatoire $X + Y$ prend toutes les valeurs possibles $x_i + y_j$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$.
La probabilité que $X + Y$ soit égale à une valeur k, notée $\mathbb{P}(X + Y = k)$ est la somme des probabilités $\mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$ avec $x_i + y_j = k$.

Exemple

On lance un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 et un dé à 6 faces numérotées de 1 à 6.
Les deux dés sont truqués et la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro de la face.
Soit X la variable aléatoire réelle donnant le numéro de la face obtenue par le dé à 4 faces et Y la variable aléatoire réelle donnant le numéro de la face obtenue par le dé à 6 faces.

1. Donner la loi de probabilité de X.
2. Donner la loi de probabilité de Y.
3. Donner la loi de probabilité de $X + Y$.

Réponse

1.

x_i	1	2	3	4
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

2.

y_i	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}(Y = y_i)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{7}$

3. On peut calculer les probabilités de $\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}$ dans le tableau ci-dessous :

x_i \ y_j	1	2	3	4	5	6	Loi de X
1	**2** $\frac{1}{210}$	**3** $\frac{1}{105}$	**4** $\frac{1}{70}$	**5** $\frac{2}{105}$	**6** $\frac{1}{42}$	**7** $\frac{1}{35}$	$\frac{1}{10}$
2	**3** $\frac{1}{105}$	**4** $\frac{2}{105}$	**5** $\frac{1}{35}$	**6** $\frac{4}{105}$	**7** $\frac{1}{21}$	**8** $\frac{2}{35}$	$\frac{1}{5}$
3	**4** $\frac{1}{70}$	**5** $\frac{1}{35}$	**6** $\frac{3}{70}$	**7** $\frac{2}{35}$	**8** $\frac{1}{14}$	**9** $\frac{3}{35}$	$\frac{3}{10}$
4	**5** $\frac{2}{105}$	**6** $\frac{4}{105}$	**7** $\frac{2}{35}$	**8** $\frac{8}{105}$	**9** $\frac{2}{21}$	**10** $\frac{4}{35}$	$\frac{2}{5}$
Loi de Y	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{7}$	1

Exemple - suite

Réponse - suite

La variable aléatoire $X+Y$ prend des valeurs comprises entre 2 et 10. Donc on peut représenter sa loi de probabilité dans le tableau suivant :

s_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Total
$\mathbb{P}(X+Y=s_i)$	$\frac{1}{210}$	$\frac{2}{105}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{43}{210}$	$\frac{19}{105}$	$\frac{4}{35}$	1

Définition

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec n un entier naturel non nul.
La variable aléatoire aX prend toutes les valeurs possibles ax_i avec $1 \leqslant i \leqslant n$.
La probabilité que aX soit égale à une valeur k, notée $\mathbb{P}(aX=k)$ est la somme des probabilités $\mathbb{P}(\{X=x_i\})$ avec $ax_i=k$.

Exemple

Dans une urne, 5 boules indiscernables au toucher sont numérotées de 1 à 5.
On prend une boule au hasard.
Soit X la variable aléatoire donnant le numéro de la boule.
Celui qui pioche une boule récupère deux fois le numéro de la boule en euros.
Soit Y la variable aléatoire correspondant aux gains.
Déterminer la loi de probabilité de X puis celle de Y.

Réponse

x_i	1	2	3	4	5	Total
$\mathbb{P}(X=x_i)$	$0,2$	$0,2$	$0,2$	$0,2$	$0,2$	1

y_i	2	4	6	8	10	Total
$\mathbb{P}(Y=y_i)$	$0,2$	$0,2$	$0,2$	$0,2$	$0,2$	1

On a $Y=2X$

2. Linéarité de l'espérance

Propriété - admise partiellement

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$
$$E(aX)=aE(X)$$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit X une variable aléatoire réelle définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit Y la variable aléatoire égale à aX.
On a donc :
$x_1 \to ax_1 = y_1$
$x_2 \to ax_1 = y_2$
...
$x_n \to ax_1 = y_n$
Il y a donc n valeurs prises par la variable aléatoire réelle Y.

On rappelle que $E(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i$

$E(aX) = E(Y) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(Y = y_k)y_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(aX = y_k)y_k = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = \frac{y_k}{a})ax_k$

$E(aX) = a\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_k)x_k = aE(X)$

Pour la démonstration de $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$, voir dans les approfondissements.

Exemple

1. Reprenons l'exemple des deux lancers de dés.
   Calculer l'espérance de $X + Y$.

2. Reprenons l'exemple de l'urne.
   Calculer l'espérance de Y.

Réponse

1. $E(X) = 1 \times \frac{1}{10} + 2 \times \frac{1}{5} + 3 \times \frac{3}{10} + 4 \times \frac{2}{5} = \frac{1}{10} + \frac{4}{10} + \frac{9}{10} + \frac{16}{10} = \frac{23}{10}$
   $E(Y) = 1 \times \frac{1}{21} + 2 \times \frac{2}{21} + 3 \times \frac{1}{7} + 4 \times \frac{4}{21} + 5 \times \frac{5}{21} + 6 \times \frac{2}{7} = \frac{1}{21} + \frac{10}{21} + \frac{9}{21} + \frac{16}{21} + \frac{25}{21} + \frac{36}{21} = \frac{97}{21}$
   Donc $E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{23}{10} + \frac{97}{21} = \frac{483}{210} + \frac{970}{210} = \frac{1453}{210}$

2. $E(X) = 1 \times 0,2 + 2 \times 0,2 + 3 \times 0,2 + 4 \times 0,2 + 5 \times 0,2 = 3$
   Donc $E(Y) = E(2X) = 2E(X) = 2 \times 3 = 6$

3. Succession d'épreuves indépendantes

Définition

On effectue successivement deux épreuves aléatoires indépendantes.
Soit X la variable aléatoire réelle qui donne le résultat de la première et Y celui de la deuxième.
On dit alors que les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes.

Remarque

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ et Y prend les valeurs y_1, y_2, y_p avec n et p deux entiers naturels non nuls.
Alors

$$\forall i \in [\![1; n]\!], \forall j \in [\![1; p]\!], \mathbb{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j)$$

Propriété

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers d'une expérience aléatoire.
La variance de la variable aléatoire aX est $V(aX) = a^2V(X)$
L'écart type de la variable aléatoire aX est $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$

On rappelle qu'une formule de la variance de X est $V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i^2\right) - (E(X))^2$

Posons $Z = aX$ et donc $\forall i \in [\![1;n]\!], z_i = ax_i$.

$V(aX) = V(Z) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Z = z_i)z_i^2\right) - (E(Z))^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(aX = ax_i)(ax_i)^2\right) - (E(aX))^2$

$V(aX) = \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)a^2x_i^2\right) - (aE(X))^2 = a^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i^2\right) - a^2(E(X))^2$

$V(aX) = a^2 \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i^2\right) - (E(X))^2\right) = a^2V(X)$

$\sigma(aX) = \sqrt{V(aX)} = \sqrt{a^2V(X)} = \sqrt{a^2}\sqrt{V(X)} = |a|\sigma(X)$

Propriété - relation d'additivité - admise

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.
La variance de la variable aléatoire $X + Y$ est :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Démonstration

Voir dans les approfondissements.

Exemple

1. Reprenons l'exemple des deux lancers de dés. Calculer la variance de $X + Y$.
2. Reprenons l'exemple de l'urne. Calculer la variance de Y.

Réponse

1. Dans cet exemple, les variables aléatoire X et Y sont indépendantes.
   Donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$.
   $V(X) = \frac{1}{10} \times 1^2 + \frac{1}{5} \times 2^2 + \frac{3}{10} \times 3^2 + \frac{2}{5} \times 4^2 = \frac{1}{10} + \frac{4}{5} + \frac{27}{10} + \frac{32}{5} = 10$

   $V(Y) = \frac{1}{21} \times 1^2 + \frac{2}{21} \times 2^2 + \frac{1}{7} \times 3^2 + \frac{4}{21} \times 4^2 + \frac{5}{21} \times 5^2 + \frac{2}{7} \times 6^2$
   $V(Y) = \frac{1}{21} + \frac{8}{21} + \frac{9}{7} + \frac{64}{21} + \frac{125}{21} + \frac{72}{7} = \frac{147}{7}$

   Donc $V(X + Y) = V(X) + V(Y) = 10 + \frac{147}{7} = \frac{214}{7}$
2. $V(Y) = V(2X) = 2^2V(X) = 4V(X) = 4 \times (0,2 \times 1^2 + 0,2 \times 2^2 + 0,2 \times 3^2 + 0,2 \times 4^2 + 0,2 \times 5^2)$
   $V(Y) = 4 \times 0,2 \times (1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2) = 0,8 \times (1 + 4 + 9 + 16 + 25) = 0,8 \times 55 = 44$

II. Somme de n variables aléatoire réelles indépendantes identiques suivant la même loi

Définition

Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et identiques qui suivent toutes cette loi.

Exemple

On lance 6 fois de suite un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4, parfaitement équilibré.
Soit X la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu par le dé.
L'échantillon $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ où les X_i suivent la même loi que X est un échantillon de taille 6 de cette loi de probabilité.

Définition

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
La somme de cet échantillon est la variable aléatoire $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Exemple

Dans l'exemple précédent, l'échantillon $(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6)$ est un échantillon de taille 6 de la loi de probabilité de X.
La somme de cet échantillon est $S_6 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 + X_6 = \sum_{i=1}^{6} X_i$.

Propriété

Soit S_n la somme d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$

Démonstration

Soit S_n la somme d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ où les X_i suivent la même loi que X donc $\forall i \in [\![1; n]\!], E(X_i) = E(X)$ et $V(X_i) = V(X)$.

Donc :
$E(S_n) = E(X_1 + X_2 + ... + X_n) = E(X_1) + E(X_2) + ... + E(X_n) = \underbrace{E(X) + E(X) + ... + E(X)}_{n \text{ fois}} = nE(X)$

Or les variables X_i sont indépendantes donc :
$V(S_n) = V(X_1 + X_2 + ... + X_n) = V(X_1) + V(X_2) + ... + V(X_n) = \underbrace{V(X) + V(X) + ... + V(X)}_{n \text{ fois}} = nV(X)$

$\sigma(S_n) = \sqrt{V(S_n)} = \sqrt{nV(X)} = \sqrt{n}\sqrt{V(X)} = \sqrt{n}\sigma(X)$

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, calculer l'espérance, la variance et l'écart type du nombre de points qu'on peut obtenir en lançant les 6 dés à 4 faces.

Réponse

La variable aléatoire réelle X donne le résultat obtenu en lançant le dé.
Donc sa loi est :

x_i	1	2	3	4	Total
$\mathbb{P}(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1

Donc :
$E(X) = \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3 + \frac{1}{4} \times 4 = \frac{1}{4} \times (1+2+3+4) = \frac{1}{4} \times 10 = 2,5$
$V(X) = \frac{1}{4} \times 1^2 + \frac{1}{4} \times 2^2 + \frac{1}{4} \times 3^2 + \frac{1}{4} \times 4^2 - 2,5^2 = \frac{1}{4} \times (1+4+9+16) - 6,25 = 7,5 - 6,25 = 1,25$
$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,25} = 0,5\sqrt{5} \approx 1,118$

Ainsi :
$E(S_6) = 6E(X) = 6 \times 2,5 = 15$
$V(S_6) = 6V(X) = 6 \times 1,25 = 7,5$
$\sigma(S_6) = \sqrt{6} \times \sigma(X) = \sqrt{6} \times \sqrt{1,25} = \sqrt{7,5} \approx 2,739$

Définition

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
Soit S_n la somme d'un échantillon de taille n de cette loi de probabilité.
La moyenne de cet échantillon est la variable aléatoire $M_n = \frac{S_n}{n}$

Propriété

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
Soit M_n la moyenne de cet échantillon.

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Démonstration

Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.
Soit S_n la somme d'un échantillon de taille n de cette loi de probabilité.
Soit $M_n = \frac{S_n}{n}$
Donc :
$E(M_n) = E\left(\frac{S_n}{n}\right) = E\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}E(S_n) = \frac{1}{n} \times nE(X) = E(X)$
$V(M_n) = V\left(\frac{S_n}{n}\right) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 V(S_n) = \frac{1}{n^2} \times nV(X) = \frac{V(X)}{n}$
$\sigma(M_n) = \sigma\left(\frac{S_n}{n}\right) = \sigma\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}\sigma(S_n) = \frac{1}{n} \times \sqrt{n}\sigma(X) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Exemple

Dans l'exemple précédent, calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la moyenne des points qu'il peut obtenir.

Réponse

$E(M_6) = E(X) = 2,5$
$V(M_6) = \frac{V(X)}{6} = \frac{1,25}{6} = \frac{5}{24} \approx 0,208$
$\sigma(M_6) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{1,25}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{1,25}{6}} = \sqrt{\frac{5}{24}} = \sqrt{\frac{120}{24^2}} = \frac{1}{24}\sqrt{4\times 30} = \frac{2\sqrt{30}}{24} = \frac{\sqrt{30}}{12} \approx 0,456$

III. Retour sur la loi binomiale

Définition

On considère un schéma de Bernoulli de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p.
La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès lors de ces n répétitions suit une loi binomiale de paramètre n et p.
On note $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$.
On peut donc dire que $Y = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ où $\forall i \in [\![1;n]\!], X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p.
$\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.

Démonstration

Voir chapitre 4.

Propriété

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers d'une expérience aléatoire, qui suit une loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$.

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration - à connaître

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers d'une expérience aléatoire, qui suit une loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$.
X est donc une somme de n variables aléatoires réelles identiques et indépendantes X_i qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p. On peut donc poser $X = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.
Soit $i \in [\![1;n]\!]$.
$E(X_i) = p$ (voir chapitre 4)
$V(X_i) = p(1-p)$ (voir chapitre 4)
Donc $\forall i \in [\![1;n]\!], E(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$

Démonstration - suite - à connaître

$$\underbrace{E(X) = nE(X_1)}_{\text{car les variables } X_i \text{ sont indépendantes}} = np$$

$$\overbrace{V(X) = nV(X_1)}^{\text{car les variables } X_i \text{ sont indépendantes}} = np(1-p)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$$

IV. Approfondissement

1. Linéarité de l'espérance - cas général

Démonstration

Soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_\ell\}$ l'univers d'une expérience aléatoire.
Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur Ω.
On rappelle que X est une fonction sur Ω, qui à chaque valeur ω_k, associe une valeur x_i.
Il en va de même pour Y.
X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ et Y prend les valeurs y_1, y_2, y_p avec n et p deux entiers naturels non nuls.
Donc $\forall k \in [\![1, \ell]\!], \exists i \in [\![1; n]\!], X(\omega_k) = x_i$.
$\forall k \in [\![1, \ell]\!], \exists j \in [\![1; p]\!], Y(\omega_k) = y_i$.

Supposons que les ω_k soient ordonnés de façon qu'il prennent dans l'ordre les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$.

$$\Omega = \left\{ \underbrace{\omega_1, ..., \omega_{k_1}}_{x_1}, \underbrace{\omega_{k_1+1}, ..., \omega_{k_2}}_{x_2}, \underbrace{\omega_{...}, ..., \omega_{...}}_{x_{...}}, \underbrace{\omega_{k_n}, ..., \omega_\ell}_{x_n} \right\}$$

$$\sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})X(\omega_k) = \sum_{k=1}^{k_1} \mathbb{P}(\{\omega_k\})X(\omega_k) + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \mathbb{P}(\{\omega_k\})X(\omega_k) + ... + \sum_{k=k_n}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})X(\omega_k)$$
$$= \sum_{k=1}^{k_1} \mathbb{P}(\{\omega_k\})x_1 + \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \mathbb{P}(\{\omega_k\})x_2 + ... + \sum_{k=k_n}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})x_n$$
$$= x_1 \sum_{k=1}^{k_1} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) + x_2 \sum_{k=k_1+1}^{k_2} \mathbb{P}(\{\omega_k\}) + ... + x_n \sum_{k=k_n}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})$$
$$= x_1\mathbb{P}(X = x_1) + x_2\mathbb{P}(X = x_2) + ... + x_n\mathbb{P}(X = x_n)$$
$$= E(X)$$

Donc une autre formule de $E(X)$ est $E(X) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})X(\omega_k)$

De même, $E(Y) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})Y(\omega_k)$

Et si on appelle $Z = X + Y$, $E(Z) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})Z(\omega_k)$

On a donc

$$E(X+Y) = E(Z) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})Z(\omega_k) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})\left(X(\omega_k) + Y(\omega_k)\right)$$

$$E(X+Y) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})X(\omega_k) + \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(\{\omega_k\})Y(\omega_k) = E(X) + E(Y)$$

2. Cas de deux variables aléatoires réelles indépendantes

Propriété

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur l'univers d'une expérience aléatoire. Alors :

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

et

$$V(X+Y) = V(X) + V(Y)$$

Démonstration

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur l'univers d'une expérience aléatoire.
X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ et Y les valeurs $y_1, y_2, ..., y_p$ avec n et p deux entiers naturels non nuls.

$E(X) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = x_i)x_i$

$E(Y) = \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(Y = y_j)y_j$

Posons $Z = XY$.

Z \ y_j / x_i	y_1	...	y_j	...	y_p
x_1	x_1y_1	...	x_1y_j	...	x_1y_p
...	...	...	...	...	...
x_i	x_iy_1	...	x_iy_j	...	x_iy_p
...	...	...	...	...	...
x_n	x_ny_1	...	x_ny_j	...	x_ny_p

Soient $i \in [\![1;n]\!]$ et $j \in [\![1;p]\!]$.
$\mathbb{P}(Z = x_iy_j) = \mathbb{P}\left(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\}\right) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j)$ car les variables X et Y sont indépendantes.
Donc $\forall i \in [\![1;n]\!], \forall j \in [\![1;p]\!], \mathbb{P}(Z = x_iy_j) = \mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j)$

Ainsi $E(XY) = E(Z) = \sum_{\text{toutes les cases du tableau}} \left(\mathbb{P}(Z = x_iy_j)x_iy_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left(\mathbb{P}(Z = x_iy_j)x_iy_j\right)$

$E(XY) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\left(\mathbb{P}(X = x_i) \times \mathbb{P}(Y = y_j)x_iy_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{P}(X = x_i)x_i \sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(Y = y_j)y_j\right)$

$E(XY) = \sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{P}(X = x_i)x_i\left(\sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(Y = y_j)y_j\right)\right) = \left(\sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(Y = y_j)y_j\right)\sum_{i=1}^{n}\left(\mathbb{P}(X = x_i)x_i\right)$

$E(XY) = \left(\sum_{j=1}^{p}\mathbb{P}(Y = y_j)y_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}(X = x_i)x_i\right) = E(Y)E(X) = E(X)E(Y)$

On peut remarquer ensuite que $E(X^2) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X^2 = x_i^2)x_i^2 = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X = x_i)x_i^2$

Et donc $V(X) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X = x_i)x_i^2 - (E(X))^2 = E(X^2) - (E(X))^2$

Ainsi $V(X+Y) = E\left((X+Y)^2\right) - (E(X+Y))^2 = E\left(X^2 + 2XY + Y^2\right) - (E(x) + E(Y))^2$
$V(X+Y) = E\left(X^2\right) + 2E(XY) + E\left(Y^2\right) - \left((E(X))^2 + 2E(X)E(Y) + (E(Y))^2\right)$
$V(X+Y) = E\left(X^2\right) - (E(X))^2 + E\left(Y^2\right) - (E(Y))^2 + +E(X)E(Y) - 2E(X)E(Y) = V(X) + V(Y)$