Variables aléatoires réelles

I - Définition

Définition 5

> Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire discrète** définie sur Ω est une fonction qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel.

Remarque

> Une variable aléatoire est généralement notée X, Y, Z, …
> La notation $\{X = x\}$ correspond à l'événement « la variable aléatoire X prend la valeur x ».
> La notation $\{X \leqslant x\}$ correspond à l'événement « la variable aléatoire X prend une valeur inférieure ou égale à x ».

Exemple 9:

On lance deux fois de suite une pièce de monnaie parfaitement équilibrée et on note les côtés apparus (P ou F).

1. Déterminer l'ensemble des issues Ω.
2. On gagne 5€ chaque fois que Pile sort et on perd 2€ chaque fois que face sort.
   Définir la variable aléatoire X sur Ω, correspondant au gain algébrique.
3. Déterminer la probabilité $\mathbb{P}(X = 3)$

> > 1. $\Omega = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$
> > 2. La variable aléatoire X sur Ω est la fonction:
> > $$\begin{array}{rcl} f : (P, P) & \mapsto & 10 \\ (P, F) & \mapsto & 3 \\ (F, P) & \mapsto & 3 \\ (F, F) & \mapsto & -4 \end{array}$$
> >   Donc la fonction f prend les valeurs -4 , 3 et 10.
> > 3. $\mathbb{P}(X = 3) = \frac{2}{4} = 0,5$

II - Loi de probabilité

Définition 6

> Soit X est une variable aléatoire définie sur un univers Ω et $\Omega' = \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}$ est l'ensemble des valeurs prises par X.
> Définir la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X, c'est associer à chaque valeur x_i de Ω', la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.

Remarque

> On représente souvent une loi de probabilité sous forme d'un tableau.

Exemple 10:

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X de l'exemple précédent.
2. Calculer $\mathbb{P}(X \leqslant 3)$

> > 1. Le tableau ci-dessous représente la loi de probabilité de la variable aléatoire discrète X.
> >
> > | x_i | **-4** | **3** | **10** |
> > |---|---|---|---|
> > | $\mathbb{P}(X = x_i)$ | 0,25 | 0,5 | 0,25 |
> >
> > 2. $\mathbb{P}(X \leqslant 3) = \mathbb{P}(X = -4) + \mathbb{P}(X = 3) = 0,25 + 0,5 = 0,75.$

III - Paramètres d'une variable aléatoire

Dans ce paragraphe, on considère une loi de probabilité définie sur un univers Ω et X une variable aléatoire définie sur Ω dont la loi de probabilité est résumée dans le tableau ci-dessous.

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$\mathbb{P}(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_n

Définition 7

> L'**espérance** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $E(X)$, défini par :
> $$E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$$

Définition 8

> La **variance** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $V(X)$, défini par :
> $$V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2 = p_1(x_1 - E(X))^2 + p_2(x_2 - E(X))^2 + \dots + p_n(x_n - E(X))^2$$

Remarque

> On a aussi:
> $$V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2 \right) - (E(X))^2 = p_1 x_1^2 + p2 x_2^2 + \dots + p_n x_n^2 - (E(X))^2$$

Définition 9

> L'**écart type** de la variable aléatoire X est le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par :

> $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

Remarque

> On peut interpréter l'espérance comme la valeur moyenne dans le cas d'un très grand nombre de répétitions de l'expérience aléatoire.
> Un jeu est équitable si son espérance vaut 0.

Exemple 11:

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X de l'exemple précédent.
Ce jeu est-il équitable ? Justifier.

>> $E(X) = -4 \times 0,25 + 3 \times 0,5 + 10 \times 0,25 = 3$
>> $E(X) \neq 0$ donc le jeu n'est pas équitable.
>> $V(X) = 0,25 \times (-4-3)^2 + 0,5 \times (3-3)^2 + 0,25 \times (10-3)^2 = 0,25 \times 49 + 0,5 \times 0 + 0,25 \times 49 = \frac{49}{2}$
>> $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \approx 4,95$

Propriété 7

> Soit X une variable aléatoire. Soient a et b deux nombres réels. On a alors :
> $E(aX+b) = aE(X) + b$
> $V(aX+b) = a^2 V(X)$
> $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

Exemple 12:

1. Dans le jeu précédent, on double les pertes et les gains. Déterminer l'espérance, la variance et l'écart-type.
2. Maintenant, on enlève 6€ aux nouveaux gains. Déterminer l'Espérance.

>> 1. $E(2X) = 2E(X) = 2 \times 3 = 6$
>> $V(2X) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{49}{2} = 98$
>> $\sigma(2X) = |2|\sigma(X) = 2 \times \frac{7\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2} \approx 9,90$
>> 2. $E(2X-6) = 2E(X) + 6 = 2 \times 3 - 6 = 0$
>>   Le jeu est donc équitable
>> $V(2X-6) = 2^2 V(X) = 4 \times \frac{49}{2} = 98$
>> $\sigma(2X-6) = |2|\sigma(X) = 2 \times \frac{7\sqrt{2}}{2} = 7\sqrt{2} \approx 9,90$