Probabilités conditionnelles

I - Un peu d'histoire

On peut considérer que les origines du « calcul des probabilités » remontent au XVIIe siècle. Pascal, Huygens, Moivre, Bernoulli, Euler, d'Alembert appliquent les notions de variable aléatoire et d'espérance à des problèmes issus de questions liées aux jeux, aux assurances et à l'astronomie.

Les probabilités conditionnelles apparaissent dans des travaux de Bayes et de Moivre, écrits en anglais au XVIIIe siècle, même si c'est Laplace qui en a élaboré la notion. Les questions traitées par ces auteurs peuvent parfois surprendre (exemple : quelle est la probabilité que le soleil se lève demain, sachant qu'il s'est levé depuis le commencement du monde ?) ; néanmoins, les probabilités conditionnelles sont omniprésentes dans la vie courante et leur utilisation inappropriée mène facilement à de fausses affirmations.

Ce n'est que vers 1930 que la description actuelle, en termes d'univers, s'est imposée. Elle permet une formalisation souple dans laquelle l'univers joue le rôle de « source d'aléas ».

La notion de variable aléatoire, présente sans définition précise depuis l'origine de la discipline, apparaît alors comme une fonction définie sur l'univers.

II - Rappels et vocabulaire

- Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont le résultat ne peut être prévu et qui , renouvelée dans des conditions identiques, ne donne pas forcément le même résultat.
- L'ensemble de toutes les issues possible d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** noté Ω.
- Une **issue** est un résultat de l'expérience aléatoire.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers.
- Un **événement élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue.
- L'**événement certain** est noté Ω.
- L'**événement impossible** est noté $\emptyset$.
- Soit $\mathbb{P}$ une **probabilité** alors on a:
    - $\forall A \in \Omega, 0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$
    - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
    - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Deux événements A et B sont **incompatibles** si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$
- L'événement **complémentaire** d'un événement A est noté $\overline{A}$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\forall A \in \Omega, \forall B \in \Omega, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

III - Définition

Définition 1

> Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Soit A un événement tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. Soit B un événement.
> La **probabilité conditionnelle que l'événement B se réalise sachant que l'événement A est réalisé** se note $\mathbb{P}_A(B)$ (« Probabilité de B sachant A ») et est définie par :
> $\mathbb{P}_A(B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

Exemple 1:

On lance deux dés parfaitement équilibrés à la suite et on ajoute les résultats.
Soit les événements suivants:

- A: « la somme des deux dés est supérieure à 9 ».
- B: « Le premier dé donne un 5 ».

1. Calculer la probabilité de l'événement A.
2. Calculer $\mathbb{P}(B)$.
3. Quelle est la probabilité d'obtenir une somme supérieur à 9, sachant qu'on a obtenu un 5 au premier dé?

> 1. On peut modéliser cette expérience dans un tableau:
>
> | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
> |---|---|---|---|---|---|---|
> | **1** | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
> | **2** | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
> | **3** | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
> | **4** | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
> | **5** | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
> | **6** | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
>
> Ainsi, $\mathbb{P}(A) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$
>
> 2. $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$
> 3. $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(B \cap A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{3}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{3}{36} \times \frac{6}{1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Exemple 2:

Dans une classe, 60% des élèves sont des filles et 40% des élèves sont des filles internes. On choisit un élève au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit interne sachant que c'est une fille?

> Posons les événements F: « L'élève est une fille » et I: « l'élève est interne ».
> On a, d'après l'énoncé :
>
> - $\mathbb{P}(F) = \frac{60}{100} = 0,6$
> - $\mathbb{P}(F \cap I) = \frac{40}{100} = 0,4$
>
> Donc $\mathbb{P}_F(I) = \frac{\mathbb{P}(F \cap I)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0,4}{0,6} = \frac{2}{3}$

Propriété 1

> Soient A et B deux événements de l'univers Ω tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. On a:
>
> - $0 \leq \mathbb{P}_A(B) \leq 1$
> - $\mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}_A(\overline{B}) = 1$

Propriété 2

> Soient A et B deux événements de l'univers Ω tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ et $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On a:
> $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}_B(A)$

Exemple 3:

Soit A et B deux événements tels que $\mathbb{P}_A(B) = 0,6$, $\mathbb{P}(A) = 0,3$ et $\mathbb{P}(B) = 0,8$.

1. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$
2. En déduire $\mathbb{P}_B(A)$

> 1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$
> 2. $\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0{,}18}{0{,}8} = \frac{9}{40} = 0,225$

Les tableaux

> On peut représenter les probabilités de certaines expériences aléatoires grâce à un tableau à double entrée.
>
> | | B | $\overline{B}$ | **Total** |
> |---|---|---|---|
> | A | $\mathbb{P}(A \cap B)$ | $\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$ | $\mathbb{P}(A)$ |
> | $\overline{A}$ | $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$ | $\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$ | $\mathbb{P}(\overline{A})$ |
> | Total | $\mathbb{P}(B)$ | $\mathbb{P}(\overline{B})$ | 1 |
>
> On peut alors calculer facilement les probabilités conditionnelles.

Exemple 4:

Dans un club multisport, on a:

- 60% des adhérents sont des garçons.
- 65% des adhérents pratiquent le football.
- 20% des adhérents sont des garçons qui ne pratiquent pas le football.

Soit les événements suivants:

- G: « l'adhérent est un garçon ».
- F: « l'adhérent pratique du football ».

On choisit un adhérent au hasard.

1. Modéliser l'expérience par un tableau à double entrée.
2. Calculer $\mathbb{P}_G(F)$.
3. Calculer la probabilité que l'adhérent soit soit un garçon sachant qu'il ne joue pas au football.

> 1. Le tableau à double entrée suivant modélise l'expérience.
>
> | | F | $\overline{F}$ | **Total** |
> |---|---|---|---|
> | G | 0,4 | 0,2 | 0,6 |
> | $\overline{G}$ | 0,25 | 0,15 | 0,4 |
> | Total | 0,65 | 0,35 | 1 |
>
> 2. $\mathbb{P}_G(F) = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{2}{3}$
> 3. $\mathbb{P}_{\overline{F}}(G) = \frac{0{,}2}{0{,}35} = \frac{4}{7}$

Définition 2

> Deux événements A et B d'un univers Ω sont **indépendants** si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Exemple 5:

Dans l'exemple précédent, les événements F et G sont-ils indépendants?

> > $\mathbb{P}(F \cap G) = 0,4$
> > $\mathbb{P}(F) \times \mathbb{P}(G) = 0,65 \times 0,6 = 0,39$ Or $0,39 \neq 0,4$ donc les événements F et G ne sont pas indépendants.

Propriété 3

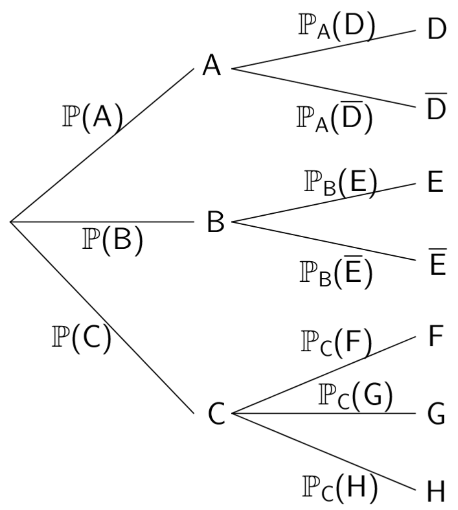
> Si deux événements A et B d'un univers Ω tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$ sont indépendants alors $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$

Propriété 4

> Si A et B sont deux événements indépendants alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.

IV - Arbre pondéré

Définition 3

> Un **arbre pondéré** (ou **arbre de probabilités**) est un schéma permettant de résumer une expérience aléatoire connaissant des probabilités conditionnelles.
>
> 
>
>
> Un arbre pondéré est constitué de:
>
> - Noeuds: là où on écrit les événements
> - une racine: le noeuds le plus à gauche
> - Feuilles: les noeuds les plus à droite
> - Branches: traits qui relient deux noeuds et sur lesquels on écrit une probabilité
>
> Un chemin est l'intersection des événements traversé de la racine à une feuille (par exemple le chemin $A \cap B$).

Propriété 5

> *Cette proprété est admise.*
>
> - La somme des probabilités des branches issues d'un même noeud est égale à 1.
> - La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches qui le composent.
> - La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y mènent.

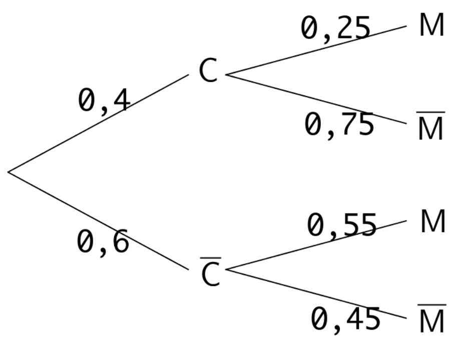
Exemple 6:

Dans ma bibliothèque, 40% de mes livres sont des livres de cours. Parmi les livres de cours, 25% sont des livres de mathématiques. Parmi les livres qui ne sont pas des livres de cours, 45% ne sont pas des livres de mathématiques. On tire un livre au hasard dans ma

bibliothèque.
Soit les événements suivants:

- C: « Le livre tiré est un livre de cours ».
- M : « Le livre tiré est un livre de mathématiques ».

1. Déterminer $\mathbb{P}(C)$, $\mathbb{P}(M)$, $\mathbb{P}_C(M)$ et $\mathbb{P}_{\overline{C}}(\overline{M})$.
2. Construire un arbre de probabilités complet représentant cette expérience aléatoire.
3. Calculer $\mathbb{P}(C \cap M)$.

> 1. $\mathbb{P}(C) = \frac{40}{100} = 0,4$
> $\mathbb{P}_C(M) = \frac{25}{100} = 0,25$
> $\mathbb{P}_{\overline{C}}(\overline{M}) = \frac{45}{100} = 0,45$
> 2. Voici l'arbre de probabilité.
>
> 
>
>
> 3. $\mathbb{P}(C \cap M) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(M) = 0,4 \times 0,25 = 0,1$

V - Partition de l'univers

Définition 4

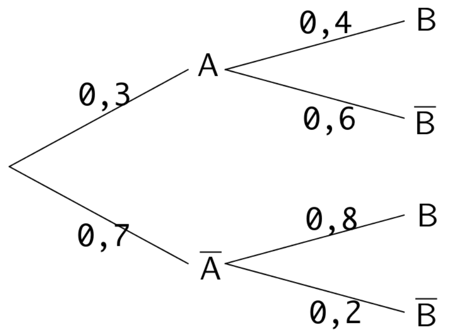
> Une famille d'événements $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une **partition** (ou un **système complet d'événements**) de l'univers Ω si elle vérifie:
>
> - $\forall i \in [\![1; n]\!], A_i \neq \emptyset$
> - $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$
> - $\forall i \in [\![1; n]\!], \forall j \in [\![1; n]\!], i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$

Propriété 6

> *Formule des probabilités totales*
> Soit Ω l'univers d'une expérience aléatoire. Soit B un événement de Ω. Soit $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ une partition de Ω.
> On a:
> $$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i \cap B) = \mathbb{P}(A_1 \cap B) + \mathbb{P}(A_2 \cap B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n \cap B)$$
> ou encore:
> $$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) \times \mathbb{P}_{A_i}(B) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}_{A_1}(B) + \mathbb{P}(A_2) \times \mathbb{P}_{A_2}(B) + \ldots + \mathbb{P}(A_n) \times \mathbb{P}_{A_n}(B)$$

Exemple 7:

On donne l'arbre pondéré ci-dessous:

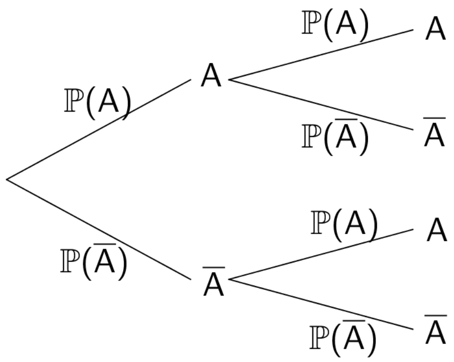


Calculer $\mathbb{P}(B)$.

> > $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}_A(B) + \mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = 0,3 \times 0,4 + 0,7 \times 0,8 = 0,12 + 0,56 = 0,68$

VI - Succession d'épreuves indépendantes

Remarque

> Dans le cas où on répète la même expérience deux fois de suite de façon indépendante, on peut établir l'arbre de probabilités ou le tableau ci-dessous:
>
> 
>

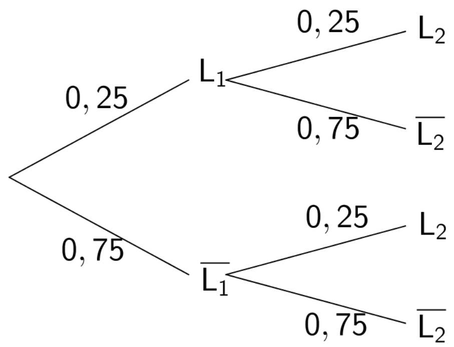
	A	$\overline{A}$	**Total**
A	$\mathbb{P}(A)^2$	$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(\overline{A})$	$\mathbb{P}(A)$
$\overline{A}$	$\mathbb{P}(\overline{A}) \times \mathbb{P}(A)$	$\mathbb{P}(\overline{A})^2$	$\mathbb{P}(\overline{A})$
Total	$\mathbb{P}(A)$	$\mathbb{P}(\overline{A})$	1

Exemple 8:

25% des élèves du lycée ont des lunettes. On choisit deux élèves au hasard et on note s'ils ont des lunettes. On suppose que la population du lycée est suffisamment importante pour que les deux épreuves soient considérées comme indépendantes. On considère l'événement L: « L'élève choisi a des lunettes ».

1. Représenter cette expérience aléatoire par un arbre pondéré.
2. Calculer la probabilité que les deux élèves portent des lunettes.
3. Calculer la probabilité qu'un seul des deux élèves porte des lunettes.
4. Représenter cette expérience par un tableau.

> > 1. Voici l'arbre pondéré.



2. $\mathbb{P}(L_1 \cap L_2) = \mathbb{P}(L_1) \times \mathbb{P}(L_2)$ puisque les événements sont indépendants. Donc $\mathbb{P}(L_1 \cap L_2) = 0,25 \times 0,25 = 0,0625$.
3. $\mathbb{P}(L_1 \cap \overline{L_2}) + \mathbb{P}(\overline{L_1} \cap L_2) = \mathbb{P}(L_1) \times \mathbb{P}(L_2) + \mathbb{P}(\overline{L_1}) \times \mathbb{P}(\overline{L_2}) = 0,25 \times 0,75 + 0,75 \times 0,25 = 0,1875 + 0,1875 = 0,375$
4. Voici le tableau:

	L_2	$\overline{L_2}$	**Total**
L_1	$0,0625$	$0,1875$	$0,25$
$\overline{L_1}$	$0,1875$	$0,5625$	$0,75$
Total	$0,25$	$0,75$	1