Mathématiques complémentaires
Chapitre 01 - Modèles d'évolution
Modèle discret

Classe de terminale

I. Limite d'une suite

I.1. Notion intuitive de limite

I.1.a. Suites de limite infinie

Pseudo-définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
Si les termes de la suite semblent devenir aussi grand que l'on veut alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$.
Si les termes de la suite semblent devenir aussi petits que l'on veut alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = -\infty$.

Propriété

Soit $k \in \mathbb{R}^*$.
Si $k > 0$ alors les suites $(kn)_{n\in\mathbb{N}}$, $(kn^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite $+\infty$.
Si $k < 0$ alors les suites $(kn)_{n\in\mathbb{N}}$, $(kn^2)_{n\in\mathbb{N}}$, $(k\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite $-\infty$.

Exemple

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = -3n^2$.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = 5\sqrt{n}$.
3. Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $w_n = 3n - 2$.

Rémonse

1. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = -\infty$.
2. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = +\infty$.
3. Il semble que les termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puissent devenir aussi grands que l'on veut donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = +\infty$.

I.1.b. Suites de limite finie

Pseudo-définition

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.
Si les termes de la suite semblent se rapprocher autant que l'on veut d'une valeur l alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = l$.

Propriété

Soit $k \in \mathbb{R}^*$.
Les suites $\left(\frac{k}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{k}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite 0.

Exemple

1. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = \frac{-3}{n}$.
2. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $v_n = 3 + \frac{2}{n^2}$.

Réponse

1. $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$.
2. Il semble que les termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se rapprochent autant qu'on le veut du nombre 3.
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = 3$

I.1.c. Suites sans limite

Définition

Si une suite possède une limite <u>finie</u> alors on dit qu'elle converge (ou qu'elle est convergente).
Sinon on dit qu'elle diverge (ou qu'elle est divergente).

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $u_n = (-1)^n$.
Justifier le fait que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Réponse

Les termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de rang pair valent 1, ceux de rang impair valent -1. Ainsi, on ne peut se rapprocher d'une valeur quelconque autant que l'on veut, ni s'éloigner autant que l'on veut (positivement ou négativement). Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

I.2. Opérations sur les limites

Les règles opératoires sur les limites sont les suivantes :

Somme de deux limites

Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Et si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n + v_n =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit de deux limites

Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n \times v_n =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Quotient de deux limites

Cas où $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n \neq 0$

Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Et si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n =$	$\ell'\neq 0$	$\pm\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Cas où $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = 0$

Si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n =$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n =$	0 avec $\forall n\in\mathbb{N}, v_n>0$	0 avec $\forall n\in\mathbb{N}, v_n>0$	0 avec $\forall n\in\mathbb{N}, v_n<0$	0 avec $\forall n\in\mathbb{N}, v_n<0$	0
alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Remarque

Dans les tableaux ci-dessus, FI signifie forme indéterminée.
Il faut alors trouver une autre façon de déterminer la limite de la suite $(u_n+v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_n\times v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
On dit qu'il faut lever l'indétermination.

Exemple

1. Déterminer la limite de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $w_n = 17n^2 - \frac{3}{\sqrt{n}}$.
2. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $p_n = 3n^2 - 2n$.
3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général $q_n = \frac{n^2+1}{3n-1}$.

Réponse

1. Posons $u_n = 17n^2$ et $v_n = -\frac{3}{\sqrt{n}}$. On a alors $w_n = u_n + v_n$.
   Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$
   Et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = 0$
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = +\infty$

2. Posons $u_n = 3n^2$ et $v_n = -2n$. On a alors $p_n = u_n + v_n$.
   Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$
   Et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = -\infty$
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} p_n = FI$
   Il faut donc lever l'indétermination.
   $p_n = 3n^2 - 2n = n^2\left(3 - \frac{2}{n}\right)$
   Posons $u'_n = n^2$ et $v'_n = 3 - \frac{2}{n}$. On a alors $p_n = u'_n \times v'_n$.
   Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u'_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v'_n = 3$
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} p_n = +\infty$.

3. Posons $u_n = n^2 + 1$ et $v_n = 3n - 1$. On a alors $q_n = \frac{u_n}{v_n}$.
   Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = +\infty$
   Et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = +\infty$
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} q_n = FI$
   Il faut donc lever l'indétermination.
   $q_n = \frac{n^2+1}{3n-1} = \frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(3-\frac{1}{n}\right)} = n \times \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}}$
   Or $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 1 + \frac{1}{n^2} = 1$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} 3 - \frac{1}{n} = 3$ donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$
   De plus $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n = +\infty$
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} n \times \frac{1+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{1}{n}} = +\infty$

I.3. Inégalités et limites

Propriété

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.
On a alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n$.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_n = \frac{3}{n} - \frac{1}{2^n}$. On suppose $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergente (on pourra le démontrer dans le paragraphe sur les suites géométriques).

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < \frac{3}{n}$.
2. En déduire que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n \leq 0$.

Réponse

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$.
   Donc $-\frac{1}{2^n} < 0$ puis $\frac{3}{n} - \frac{1}{2^n} < \frac{3}{n}$.
   D'où $u_n < \frac{3}{n}$.
2. On sait que $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{3}{n} = 0$. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\left(\frac{3}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont convergentes. De plus, $u_n < \frac{3}{n}$.
   Donc $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\mapsto+\infty} \frac{3}{n}$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n \leq 0$.

Théorème des gendarmes

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ trois suites. Soit $l \in \mathbb{R}$.
Si :

- à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$
- $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = \lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = l$

Alors $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = l$

Exemple

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $v_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$.
Déterminer $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n$.

Réponse

Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.
Donc $\frac{-1}{n^2} \leq \frac{(-1)^n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.
Ou encore $\frac{-1}{n^2} \leq v_n \leq \frac{1}{n^2}$.
Posons $u_n = \frac{-1}{n^2}$ et $w_n = \frac{1}{n^2}$.
On a donc $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq w_n$.
De plus, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$ et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} w_n = 0$.
Donc d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} v_n = 0$

I.4. Cas particulier des suites géométriques

I.4.a. Limite d'une suite géométrique de raison positive

Propriété

Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = +\infty$
- Si $0 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = 0$
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} q^n = 1$

Remarque

Soit $q \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de terme initial $v_0 \in \mathbb{R}$. On a alors :

	$v_0 < 0$	$v_0 = 0$	$v_0 > 0$
$0 < q < 1$	$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = 0$	$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = 0$	$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = 0$
$q = 1$	$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = v_0$	$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = v_0 = 0$	$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = v_0$
$q > 1$	$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = -\infty$	$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = v_0 = 0$	$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = +\infty$

Exemple

Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{3}{2^n}$.

<u>1ère façon</u>

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 3 = 3$.

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 2^n = +\infty$.

Donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{3}{2^n} = 0$.

Ou encore $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = 0$.

<u>2ème façon</u>

$v_n = \frac{3}{2^n} = 3 \times \frac{1}{2^n} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 3 = 3$.

$\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$.

Donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

Ou encore $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = 0$.

<u>3ème façon</u>

$v_n = \frac{3}{2^n} = 3 \times \frac{1}{2^n} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$ et de terme initial $v_0 = 3$. $v_0 > 0$ et $0 < q < 1$ donc $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = 0$.

I.4.b. Limite de la somme des termes d'une suite géométrique de raison positive strictement inférieure à 1

Propriété

Soit $q \in]0;1[$ (ou encore $0 < q < 1$). Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q et de terme initial $v_0 \in \mathbb{R}$.

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$.

On a :
$\lim_{n\mapsto+\infty} S_n = \frac{v_0}{1-q}$.

Démonstration

Soit $n \in \mathbb{N}$.
$S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n = v_0 \times 1 + v_0 \times q + v_0 \times q^2 + ... + v_0 \times q^n = v_0 \left(1 + q + q^2 + ... + q^n\right)$
$= v_0 \times \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{v_0}{1-q} \times (1 - q^n)$
Or $0 < q < 1$ donc $\lim_{n\mapsto+\infty} q^n = 0$.
D'où $\lim_{n\mapsto+\infty} 1 - q^n = 1$.
Ainsi $\lim_{n\mapsto+\infty} \frac{v_0}{1-q} \times (1 - q^n) = \frac{v_0}{1-q}$.
Soit encore $\lim_{n\mapsto+\infty} S_n = \frac{v_0}{1-q}$.

Exemple

Une entreprise veut réduire son empreinte de CO_2 de 6% chaque année.
En 2020, elle émet 45000 tonnes de CO_2.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On note u_n le nombre de tonnes de CO_2 émis par l'entreprise lors de l'année $2020 + n$.

1. Déterminer u_0.
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
4. Exprimer u_n en fonction de n.
5. Quelle est la tendance à long terme des émissions de CO_2 de cette entreprise ?
6. On note S_n le nombre total de tonnes de CO_2 émit par l'entreprise de 2020 à $2020 + n$. Quelle est la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$?

Réponse

1. $u_0 = 45000$.
2. $u_{n+1} = u_n \times \left(1 - \frac{6}{100}\right) = u_n \times 0,94 = 0,94u_n$.
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $0,94$ et de terme initial $u_0 = 45000$.
4. On a donc $u_n = u_0 \times q^n = 45000 \times 0,94^n$.
5. $0 < q < 1$ donc $\lim_{n\mapsto+\infty} u_n = 0$.
   A long terme l'entreprise aura tendance à ne plus émettre de CO_2.
6. $\lim_{n\mapsto+\infty} S_n = \frac{u_0}{1-q} = \frac{45000}{1-0,94} = \frac{45000}{0,06} = 750000$.

II. Suite arithmético-géométrique

II.1. Généralités

Définition

Soient a et b deux nombres réels.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ et par la donnée de u_0.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique.

Remarque

- Si $a = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante à partir du rang 1, et $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = b$
- Si $a = 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison b : on ajoute toujours le même nombre b pour passer au terme suivant.
- Si $b = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison a.
- Si $a = 1$ et $b = 0$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique et géométrique en même temps : elle est constante.

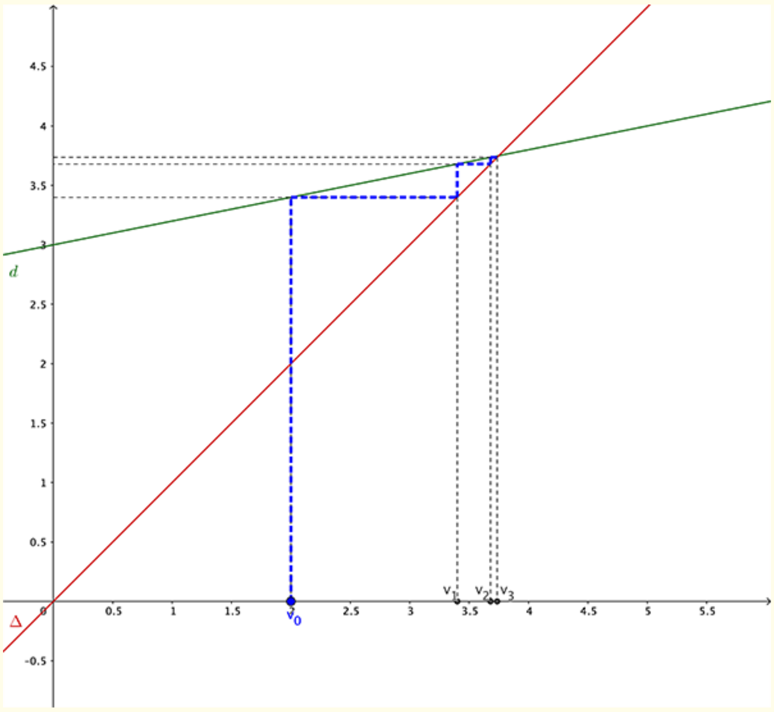
Représentation graphique

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite arithmético-géométrique définie par la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b$ et par la donnée de u_0. Dans un repère orthonormé, on représente une suite arithmético-géométrique par un ensemble de points situés sur l'axe des abscisses.
La méthode est la suivante :

- On trace la droite Δ d'équation $y = x$ et la droite d d'équation $y = ax + b$.
- On place u_0 sur l'axe des abscisses.
- On utilise la droite d pour placer $u_1 = au_0 + b$ sur l'axe des ordonnées, puis on utilise la droite Δ pour reporter u_1 sur l'axe des abscisses.
- On réitère l'étape précédente pour placer u_2, u_3, ... sur l'axe des abscisses.

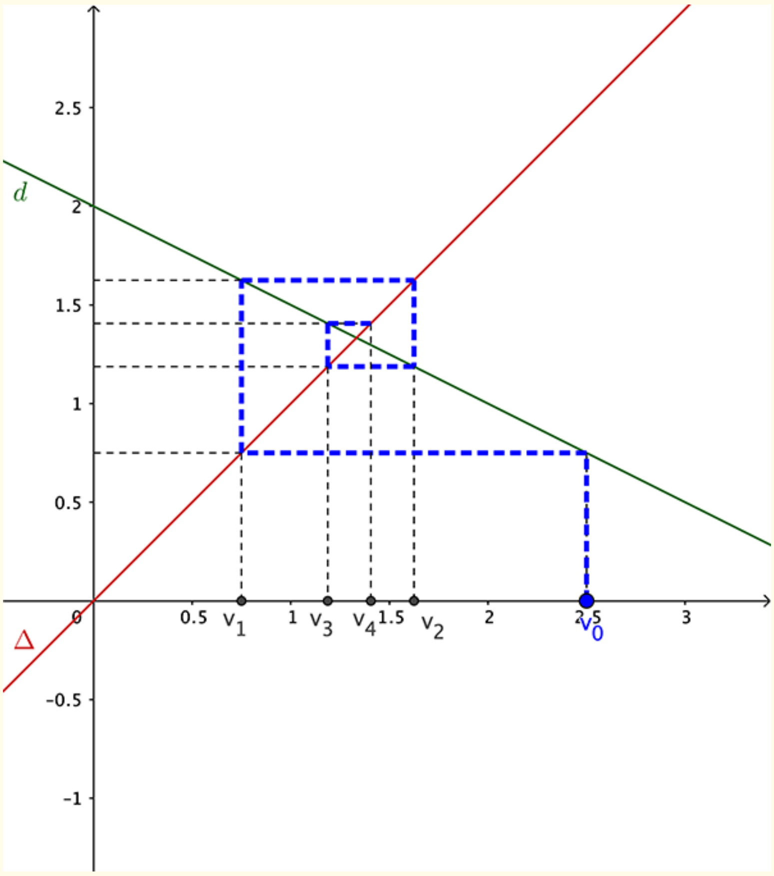
Exemple 1

Soit la suite arithmético-géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 2$ et $v_{n+1} = 0,2v_n + 3$.
Sans faire de calcul, représenter les quatres premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé.



Exemple 2

Soit la suite arithmético-géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 2,5$ et $v_{n+1} = -0,5v_n + 2$.
Sans faire de calcul, représenter les cinq premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans un repère orthonormé.



II.2. Comment trouver la formule explicite du terme général d'une suite arithmético-géométrique ?

On connaît la formule de récurrence d'une suite arithmético-géométrique et son premier terme et on veut trouver la formule explicite de son terme général en fonction de n.

Soit la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}$ et $u_{n+1} = au_n + b$.

- 1er cas : $a = 1$
  On a alors $u_{n+1} = u_n + b$.
  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite arithmétique de raison b.
  Ainsi $u_n = u_0 + nb$.

- 2ème cas : $a \neq 1$
  La méthode est la suivante :

  - Recherche d'une suite constante solution particulière de $u_{n+1} = au_n + b$:
    On cherche une suite constante qui est solution de $u_{n+1} = au_n + b$.
    Si la suite est constante alors $u_{n+1} = u_n = x$ avec $x \in \mathbb{R}$.
    Il faut donc résoudre $x = ax + b$.
    $x = ax + b \Leftrightarrow x - ax = b \Leftrightarrow x(1-a) = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{1-a}$
  - Utilisation de la suite constante pour déterminer la formule explicite de la suite arithmético-géométrique :
    Posons $v_n = u_n - x$ ou encore $u_n = v_n + x$.
    On a alors :
    $v_{n+1} = u_{n+1} - x = au_n + b - x = a\left(v_n + x\right) + b - x = av_n + ax + b - x$
    $v_{n+1} = av_n + a\frac{b}{1-a} + b - \frac{b}{1-a} = av_n + a\frac{b}{1-a} + \frac{b(1-a)}{1-a} - \frac{b}{1-a} = av_n + \frac{ab+b(1-a)+b}{1-a} = av_n + \frac{ab+b-ab+b}{1-a} = av_n$
    Donc la suite v_n est géométrique de raison a et de terme initial $v_o = u_0 - x = u_0 - \frac{b}{1-a}$.
    On a donc $v_n = v_0 \times a^n = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n$.
    Donc enfin $u_n = v_n + x = \left(u_0 - \frac{b}{1-a}\right) \times a^n + \frac{b}{1-a}$

Exemple

Soit la suite arithmético-géométrique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 2$ et $u_n + 1 = 3u_n - 1$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Déterminer la formule explicite de u_n en fonction de n.
3. Vérifier la question 1.

Réponse

1. $u_1 = 3u_0 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$ $u_2 = 3u_1 - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14$
2. On cherche une suite constante solution de $u_n + 1 = 3u_n - 1$. On doit donc résoudre $x = 3x - 1$. $x = 3x - 1 \Leftrightarrow 1 = 3x - x \Leftrightarrow 1 = 2x \Leftrightarrow \frac{1}{2} = x$ On utilise cette suite pour trouver la formule explicite de u_n. Posons $v_n = u_n - \frac{1}{2}$ ou encore $u_n = v_n + \frac{1}{2}$. On a $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{2} = 3u_n - 1 - \frac{1}{2} = 3\left(v_n + \frac{1}{2}\right) - \frac{3}{2} = 3v_n + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 3v_n$ La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison $q = 3$ et de terme initial $v_0 = u_0 - \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. On a donc $v_n = v_0 \times q^n = \frac{3}{2} \times 3^n$. Ainsi $u_n = v_n + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 3^n + \frac{1}{2}$
3. $u_0 = \frac{3}{2} \times 3^0 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{4}{2} = 2$ $u_1 = \frac{3}{2} \times 3^1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 3 + \frac{1}{2} = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = \frac{10}{2} = 5$
   $u_2 = \frac{3}{2} \times 3^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times 9 + \frac{1}{2} = \frac{27}{2} + \frac{1}{2} = \frac{28}{2} = 14$

III. Exemples de problèmes

III.1. Evolution d'un capital, amortissement d'une dette

Une banque qui prête de l'argent à un emprunteur estime que le prêt doit lui rapporter des intérêts annuels égaux à $t\%$ du montant de la dette.
Un prêt a donc plusieurs caractéristiques :

- un taux annuel t
- un capital emprunté C
- une durée d en années

A partir de ces informations, on calcule le montant des annuités.

Une annuité, c'est le montant remboursé en 1 an.
Soit A_n l'annuité remboursée lors de l'année n. Elle est composée de :

- l'intérêt I_n calculé à partir du capital restant dû.
- l'amortissement M_n correspondant à la part de capital remboursé durant l'année n.

On appelle C_n le capital restant dû à la fin de l'année n.
Partie A : un exemple
Je désire acheter une maison. Pour cela, j'ai emprunté 170000 à la banque. Voici les caractéristiques de mon prêt :

- taux annuel : $1,77\%$
- capital emprunté : 170000
- durée : 15 ans
- mensualités : $1083,65$€

1. Déterminer C_0.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = 1,0177C_n - 13003,8$.
3. Trouver l'expression de C_n en fonction de n.
4. Vérifier qu'au bout de 15 ans, le capital restant dû est inférieur ou égal à 0. Si besoin, vous arrondirez les réusltats à 10^{-2}.

Partie B : Cas général
On veut maintenant trouver la formule permettant de calculer l'annuité a connaissant le capital emprunté C sur une période de N année à un taux annuel t.

1. Déterminer C_0.
2. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, C_{n+1} = (1+t)C_n - a$.
3. Déterminer l'expression de C_n en fonction de n.
4. Expliquer pourquoi $C_N = 0$.
5. En déduire que $a = \frac{-t(1+t)^N \times C}{1-(1+t)^N}$
6. Vérifier le montant de la mensualité que je paye dans la partie A.

III.2. Loi de décroissance radioactive

Lors de la catastrophe nucléaire de Fukushima au Japon en 2011, les deux principaux éléments radioactifs nocifs relâchés dans l'atmosphère sont l'iode 131 et le césium 137.

On appelle demi-vie d'un noyau radioactif ou période radioactive, la durée nécessaire pour que la moitié des noyau initialement présents se soit désintégrée.
La demi-vie de l'iode 131 est de 8 jours et celle du césium 137 est de 30 ans.

Partie A : iode 131

Soit u_n la proportion d'iode 131 restante au bout d'une durée de n demi-vies. On a donc $u_0 = 100\% = 1$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

3. Au bout de 4 semaines, quelle sera la proportion d'iode 131 retante dans l'atmosphère ?

4. Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interprêter ce résultat.

5. On se propose de déterminer la durée au bout de laquelle la proportion résiduelle d'iode 131 devient inférieure à 1% de la quantité émise lors de la catastrophe. Pour cela, on utilise un programme écrit en *Python*.

```
def seuil(m):
    n=0
    u=1
    while u>m:
        u=0.5*u
        n=n+1
    return n
```

   (a) Que renvoie ce programme ?

   (b) Répondre au problème.

Partie B On admet que le nombre de noyaux de césium 137 diminue de $2,284\%$ chaque année.
Soit v_n la proportion de césium 137 restante au bout d'une durée de n années. On a donc $v_0 = 100\% = 1$.

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.

2. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

3. Au bout de 5 ans, quelle sera la proportion de césium 137 retante dans l'atmosphère ?

4. Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Interprêter ce résultat.

5. (a) On veut savoir au bout de combien d'années la proportion de césium 137 désintégré sera supérieur à $99,9\%$.

   (b) Ecrire un programme semblable à celui de la partie A, qui permettra de répondre au problème.

   (c) Répondreau problème.

III.3. Loi de refroidissement de Newton

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.
Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, en degré Celsius, supposée constante, est notée M.
Nous allons étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton.

Pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n, en degré Celsius, et n en minute. Ainsi, $T_0 = 80$.
On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :
$T_{n+1} - T_n = k(T_n - M)$ où k est une constante réelle.

On choisit $M = 10$ et $k = -0,2$.
Ainsi, pour tout entier naturel n, $T_{n+1} - T_n = -0,2(T_n - 10)$.

1. D'après le contexte, peut -on conjecturer le sens de variation de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+1} = 0,8T_n + 2$.
3. (a) Déterminer une suite constante vérifiant la relation de récurrence suivie par $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) En déduire que, pour tout entier naturel n, $T_n = 70X0,8n + 10$.
   (c) Déterminer la limite de la suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (d) On considère l'algorithme ci-dessous :

Algorithme 1 :

tant que $T \geq A$ **faire**
  $T \leftarrow 0,8T + 2$
  $n \leftarrow n + 1$
fin

i. Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
Pour la valeur $A = 40$, recopier et compléter autant que nécessaire le tableau suivant.

T	80	66	...
n	0		...
Condition $T \geq A$	Vrai		...

ii. En déduire la valeur de n à la fin de l'exécution de l'algorithme lorsque la valeur de A est 40.
iii. Interpréter cette valeur dans le contexte de cette situation.

III.4. Modèle de Malthus, modèle de Verhulst

Partie A : modèle de Malthus

En 1800, l'Angleterre comptait 8 millions d'habitants.
Malthus avait émis les hypothèses suivantes :

- La population d'Angleterre suivait un progression géométrique en augmentant de 2
- l'agriculture anglaise, en 1800, permettait de nourrir 10 millions d'habitants et son amélioration permettrait de nourrir 400000 habitants supplémentaires par an, suivannt une progression arithmétique.

1. Soit v_n la population d'Angleterre (en millions d'habitants) en l'année $1800 + n$.
   (a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n.
   (b) Déterminer la nature de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
   (d) Calculer la population d'Angleterre en 1900 .
2. Soit u_n le nombre de personnes (en millions) que pouvait nourrir l'agriculture anglaise en l'année $1800 + n$.
   (a) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   (b) Quelle est la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (d) Calculer le nombre de personnes que pouvait nourrir l'agriculture anglaise en 1900.
   (e) En 1900, selon le modèle de Malthus, la population anglaise pouvait-elle être nourrie grâce à l'agriculture anglaise ?
3. A l'aide de la calculatrice ou d'un tableur, déterminer l'année à partir de laquelle, selon Malthus, l'agriculture anglaise ne permettrait plus de nourrir toute la population anglaise.
4. Le modèle de Malthus est-il réaliste ?

Partie B : modèle de Verlhust

On étudie une population de 200000 coccinelles. On note c_n le nombre de coccinelles, en million, n années après le début de l'étude.

1. Déterminer v_0.
2. Le modèle de Verlhust affirme que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = kv_n(1 - v_n)$, où $k > 0$ est un paramètre qui dépend de l'environnement.
   Dans cette question, on prend $k = 1,8$.
   (a) Dans un repère orthonormé, représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les 4 premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Comment la population de coccinelles semble-t-elle évoluer ?
   (c) Grâce à la calculatrice ou à un programme en python, déterminer la durée (en année) au bout de laquelle la population dépassera 444444 coccinelles.
3. Refaire la question 2. mais avec $k = 1$.
4. Refaire la question 2. mais avec $k = 2$.

III.5. Modèle proie prédateur

On se propose d'étudier l'évolution de la population de truites (les proies) et de brochets (les prédateurs) dans la Meuse.
On note T_n et B_n une estimation du nombre de truites et de Brochets respectivement dans la Meuse le 1er juin de l'année $2019+n$ (où n désigne un nombre entier naturel). On estime qu'entre le 1er juin $2019+n$ et le 1er juin de l'année suivante :

- Le nombre de truites augmente de 10% mais lors des $T_n \times B_n$ rencontres possibles entre les deux espèces, seules $0,1\%$ ont effectivement lieu et à chacune d'entre elles, la truite est dévorée par le brochet.
- Parmi les B_n brochets, 5% meurent uniquement à cause de leur sensibilité à la toxicité de la Meuse. Toutefois, le fait de dévorer des truites permet aux brochets de se reproduire. Ainsi, le nombre de nouveaux brochets est estimé à 50% du nombre de truites dévorées.

1. Cas particuliers
   Au 1er juin 2019, dans le secteur étudié, on avait $T_0 = 50$ et $B_0 = 200$.
   (a) Calculer le nombre de rencontres possibles entre une truite et un brochet lors de la première année.
   (b) Calculer le nombre de truites dévorées lors de la première année.
   (c) Calculer T_1 et B_1.
2. Etude des suites
   (a) Justifier que pour tout entier naturel n, $\left\{\begin{array}{rcl} T_{n+1} & = & 1,1T_n - 0,001T_n \times B_n \\ B_{n+1} & = & 0,95B_n + 0,0005T_n \times B_n \end{array}\right.$
   (b) En l'absence de prédateur, comment évolue l'effectif des proies ? Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n, puis T_n en fonction de T_0. En déduire la limite de la suite $(T_n)_{,\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.
   (c) En l'absence de proie, comment évolue l'effectif des prédateurs ? Exprimer B_{n+1} en fonction de B_n, puis B_n en fonction de n et de B_0. En déduire la limite de la suite $(B_n)_{,\in\mathbb{N}}$. Interpréter le résultat.
   (d) Vérifier que pour tout entier naturel n, $\left\{\begin{array}{rcl} T_{n+1} - T_n & = & T_n\,(0,1 - 0,001B_n) \\ B_{n+1} - B_n & = & B_n\,(-0,05 + 0,0005T_n) \end{array}\right.$
   (e) En supposant qu'il y ait des proies et des prédateurs, quels auraient dû être les nombres de truites et de brochets initialement dans la Meuse pour que ceux-ci soient constants ?
3. Simulation avec Python
   (a) Créer une fonction qui simule le nombre de truites lors de l'année $2019 + n$.
   (b) Créer une fonction qui simule le nombre de brochets lors de l'année $2019 + n$.
   (c) Créer une fonction qui affiche le nombre de truites et de brochets depuis le début de l'étude jusqu'à l'année $2019 + n$.
   (d) En affichant les 60 premières années, quelle semble être l'évolution de ces deux types de poissons ?
   (e) Faire varier les effectifs initiaux. L'évolution des deux types de poissons est-elle fortement influencée par ceux-ci ?