Chapitre I – Optimisation du transport de l'électricité

I. Polynômes du second degré

définition

> La fonction f est une **fonction polynôme du second degré** lorsqu'il existe trois nombres réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$.

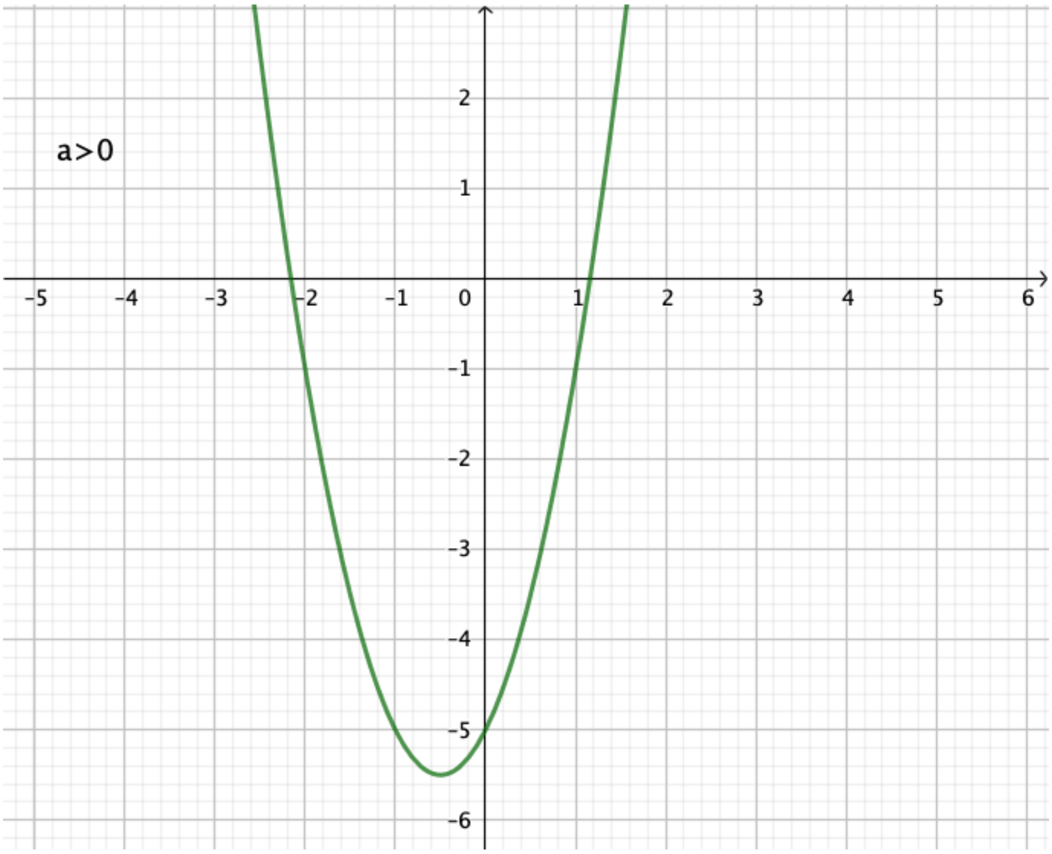
Exemple:

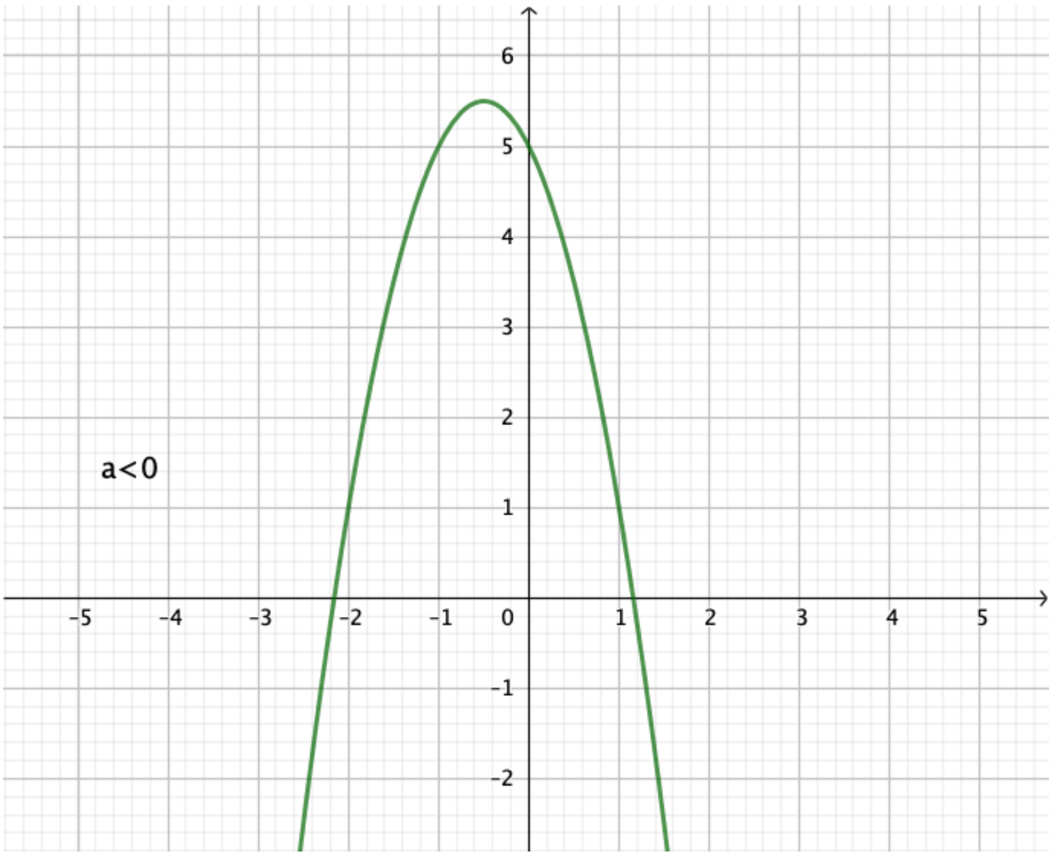
Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions polynômes du second degré?
$f : x \mapsto 3x^2 + 2x - 5$
$g : x \mapsto -2x^2 + 3x - 7$
$h : x \mapsto x(2x - 3)$
$i : x \mapsto \frac{1}{x}$
$j : x \mapsto \frac{3x^2+2x-5}{2x^2-7x+1}$
$k : x \mapsto x^3 + 6x - 1$
$l : x \mapsto x^2 - 3x$

> > Les fonctions f, g, h et l sont des fonctions polynômes du second degré.

Courbe représentative

> La courbe représentative d'une fonction P polynôme du second degré définie par $P(x) = ax^2 + bx + c$ est une parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.
> Elle possède un axe de symétrie d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.





Variations et extremum de la fonction $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$

> Une fonction polynôme du second degré $P : x \mapsto ax^2 + bx + c$ admet un extremum:
>
> - Si $a > 0$, alors P admet un minimum égal à $\beta = P(\alpha)$ et atteint pour $x = \alpha = \frac{-b}{2a}$. De plus P est

décroissante sur $]-\infty;\alpha]$ et croissante sur $[\alpha;+\infty[$.

- Si $a<0$, alors P admet un maximum égal à $\beta=P(\alpha)$ et atteint pour $x=\alpha=\frac{-b}{2a}$. De plus P est croissante sur $]-\infty;\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

On a donc le tableau de variation suivant:
Si $a>0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	β	$\nearrow$	

si $a<0$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	β	$\searrow$	

Exemple:

Déterminer l'extremum local de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x)=-2x^2+3x-7$.

P est une fonction polynôme du second degré.
$a<0$, $\alpha=\frac{-3}{2\times(-2)}=\frac{3}{4}$ et
$\beta=P(\alpha)=-2\alpha^2+3\alpha-7=-2\left(\frac{3}{4}\right)^2+3\times\left(\frac{3}{4}\right)-7=-2\times\frac{9}{16}+\frac{9}{4}-7=-\frac{9}{8}+\frac{18}{8}-\frac{56}{8}=-\frac{47}{8}$.
Donc P admet un maximum qui vaut $-\frac{47}{8}$ et qui est atteint pour $x=\frac{3}{4}$.
De plus, P est croissante sur $\left]-\infty;\frac{3}{4}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{3}{4};+\infty\right[$.
On a donc le tableau de variations suivant:

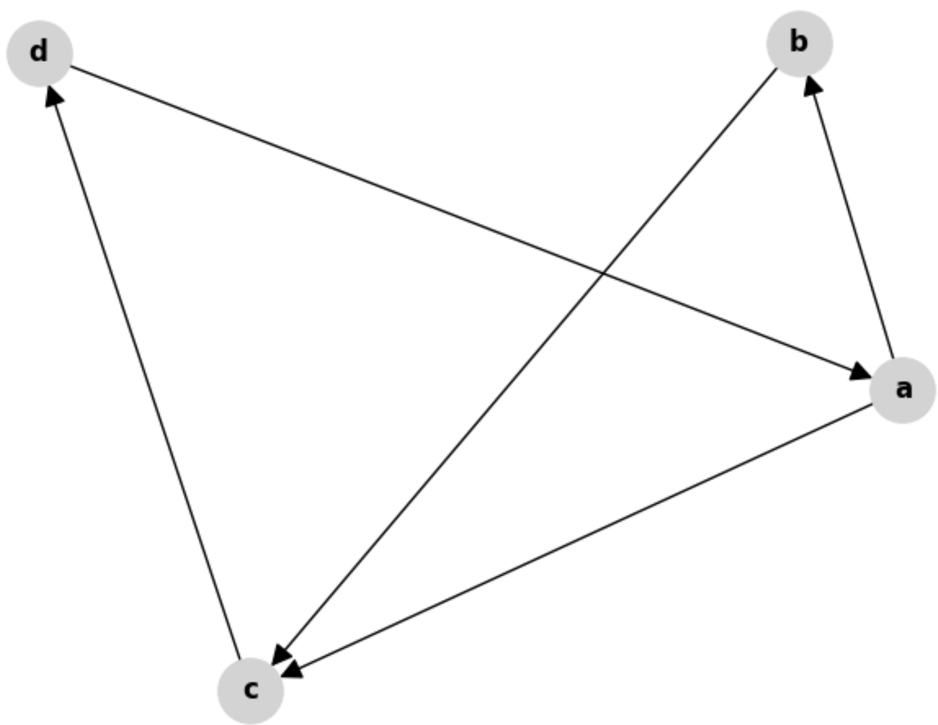
> > | x | $-\infty$ | $\frac{3}{4}$ | $+\infty$ |
> > |---|---|---|---|
> > | $f(x)$ | ↗ | $-\frac{47}{8}$ | ↘ |

II. Les graphes orientés

Définition et vocabulaire Définition
Un ***graphe orienté*** est composé:

- de ***sommets***
- des ***arcs*** reliant des couples de sommets dans un sens donné, représentés par des flèches.

Exemple de graphe
Voici la représetnation d'un graphe.



Il possède 4 sommets d'étiquettes a, b, c, d.
Il possède aussi 5 arcs:

- de a vers b
- de a vers c

- de d vers a
- de c vers d
- de b vers c

Vocabulaire

L'***origine*** de l'arc est le sommet duquel part l'arc. On l'appelle aussi ***source*** de l'arc.

Le ***but*** de l'arc est le sommet vers lequel pointe l'arc.

Un ***successeur*** d'un sommet x est un sommet but d'un arc d'origine x.

Un ***prédécesseur*** d'un sommet y est un sommet origine d'un arc de but y.

Exemple
Avec le graphe orienté précédent, on peut remplir le tableau ci-dessous:

Sommet	prédécesseurs	successeurs
a	d	b , c
b	a	c
c	a , b	d
d	c	a

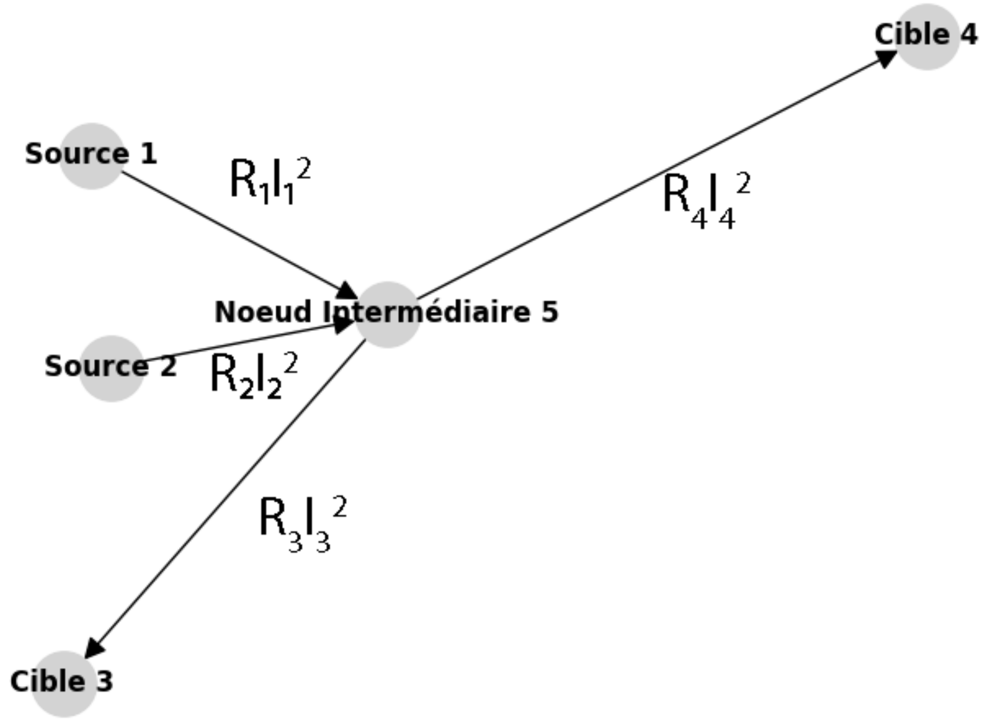
Modélisation d'un réseau électrique
On peut modéliser un réseau électrique par un graphe:

- les sources électriques, les cibles et les noeuds intermédiaires sont des sommets.
- les lignes hautes, moyennes et basses tensions sont les arcs ayant des poids égaux à l'effet Joule.

Le but est de minimiser les pertes dues à l'effet Joule.

Dans un réseau électrique construit de façon optimale, on a les contraintes suivantes:

- La somme des intensités entrantes dans un noeud intermédiaire est égale à la somme des intensités sortantes.
- L'intensité totale arrivant à chaque cible est imposée par l'intensité utilisée par la cible.
- Les sources peuvent fournir au maximum les puissances P_{max} .



Comme l'intensité totale arrivant aux cibles est fixée, les pertes par effet Joule ne peuvent pas être minimisées. La perte totale des sources par effet Joule est égale à $Perte = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$.
On peut minimiser cette perte puisque I_1 et I_2 peuvent être ajustées.
La somme des intensité entrantes est égale à la somme des intensités sortantes du noeud intermédiaire donc: $I_1 + I_2 = I_3 + I_4$.

Il vient donc que $I_2 = I_3 + I_4 - I_1$.
Ainsi $Perte = R_1 I_1^2 + R_2 (I_3 + I_4 - I_1)^2$.
En développant cette dernière expression, on obtient un polynôme du second degré en I_1.
Il suffit alors de trouver le minimum de cette fonction $Perte$.

Exemple:

Dans le réseau de distribution précédent:

- la source 1 délivre une puissance maximale de 18000W avec une tension de 360V et une résistance de 0,6Ω.
- la source 2 délivre une puissance maximale de 9000W avec une tension de 260V et une résistance de 0,8Ω.
- la cible 3 délivre une puissance de 3kW avec une tension de 230V.
- la cible 4 délivre une puissance de 15kW avec une tension de 230V.

Déterminer les pertes par effet Joule minimales.

> On a donc $R_1 = 0,6$, $R_2 = 0,8$, $I_{1_{max}} = \frac{18000}{360} = 50$, $I_{2_{max}} = \frac{9000}{260} \approx 34,6$, $I_3 = \frac{3000}{230} \approx 13,0$ et $I_4 = \frac{15000}{230} \approx 65,2$.

Ainsi on obtient $Perte = 0,6 \times I_1^2 + 0,8(13,0 + 65,2 - I_1)^2 = 0,6 \times I_1^2 + 0,8(78,2 - I_1)^2$

$Perte = 0,6 \times I_1^2 + 0,8(78,2^2 - 2 \times 78,2 \times I_1 + I_1^2) = 0,6 \times I_1^2 + 4892,192 - 125,12 I_1 + 0,8 I_1^2$
$Perte = 1,4 I_1^2 - 125,12 I_1 + 4892,192$

La perte minimale devrait donc être atteinte pour $I_1 = \frac{-(-125,12)}{2 \times 1,4} \approx 44,69A$.
On a bien $44,69 \leq 50$, c'est-à-dire $I_1 \leq I_{1_{max}}$.
Donc la perte minimale est atteinte pour $I_1 = 44,69A$.
Ainsi $I_2 = 13,0 + 65,2 - 44,69 = 33,51A$, et $33,51 \leq 34,6$ donc $I_2 = 33,51A$.

On aura donc $P_1 = 0,6 \times 44,69^2 = 1198,32W \approx 1200W$ et
$P_2 = 0,8 \times 33,51^2 = 898,34W \approx 900W$.