

chapitre 02 - Les modèles démographiques - modèles linéaires

I. Les fonctions affines

Définition

Un fonction affine est une fonction f du type $f(x) = mx + p$ avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$.

Exemple:

Les fonctions f , g , h et r suivantes sont-elles affines?

$$f : x \mapsto 3x - 2$$

$$g : x \mapsto -\frac{2}{7}x + 3$$

$$h : \mapsto \frac{3x-5}{2x+6}$$

$$r : \mapsto \frac{6x+2}{3}$$

Les fonctions f , g et r sont affines.

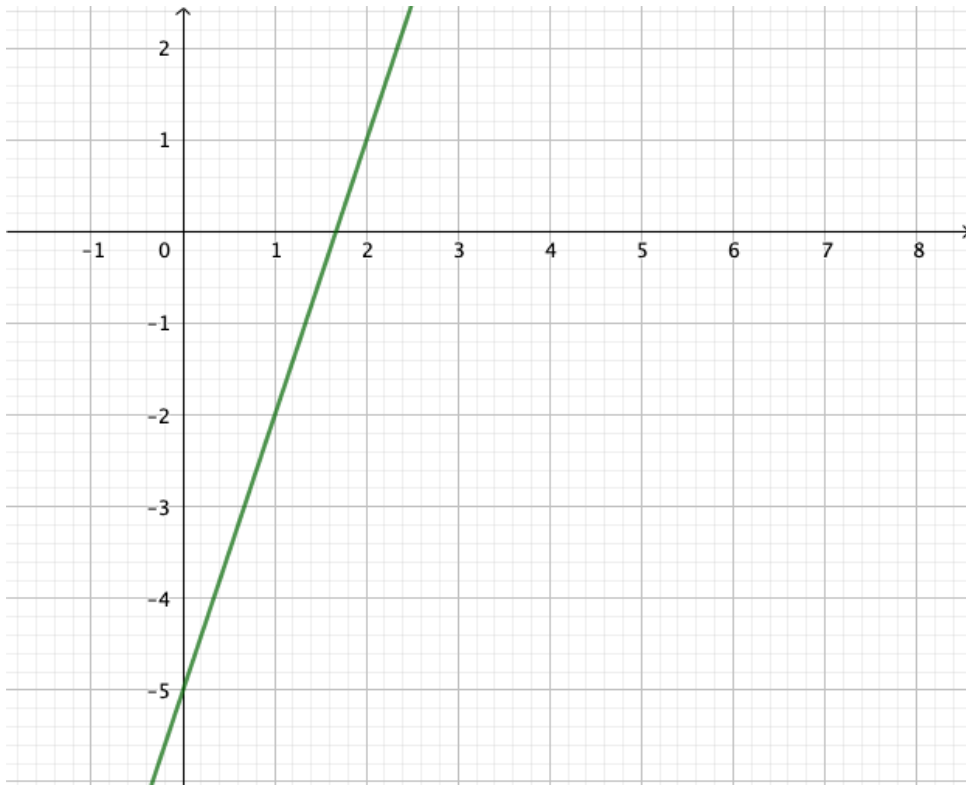
Cas particuliers

- Si $p = 0$, alors f est une fonction linéaire.
- Si $m = 0$, alors f est une fonction constante.

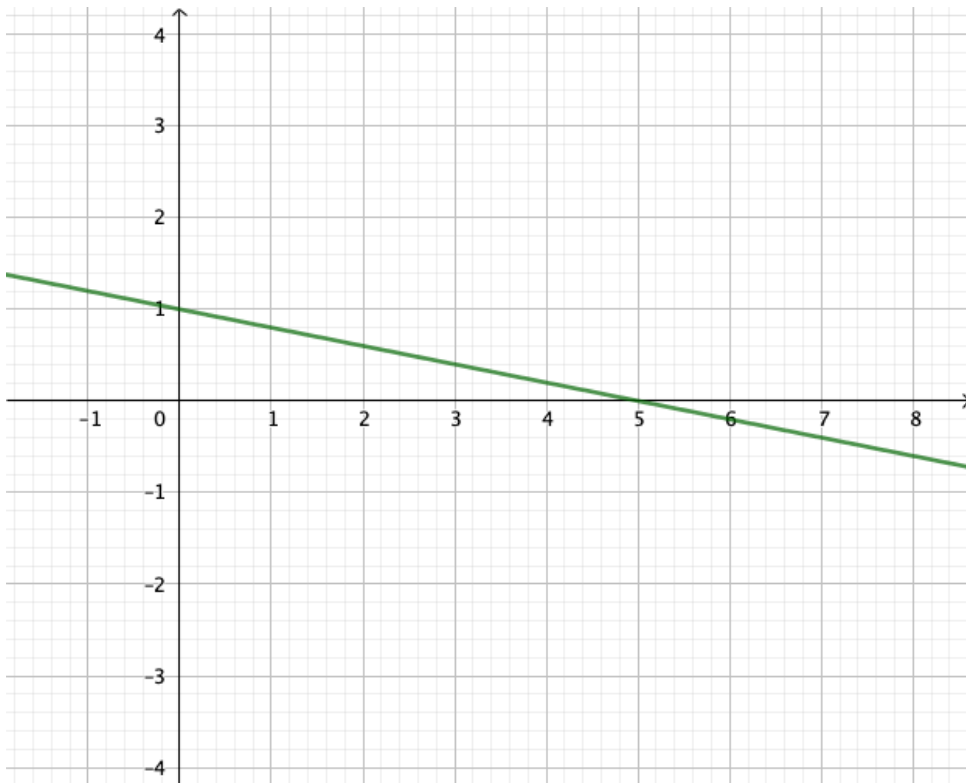
Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction affine est une droite.

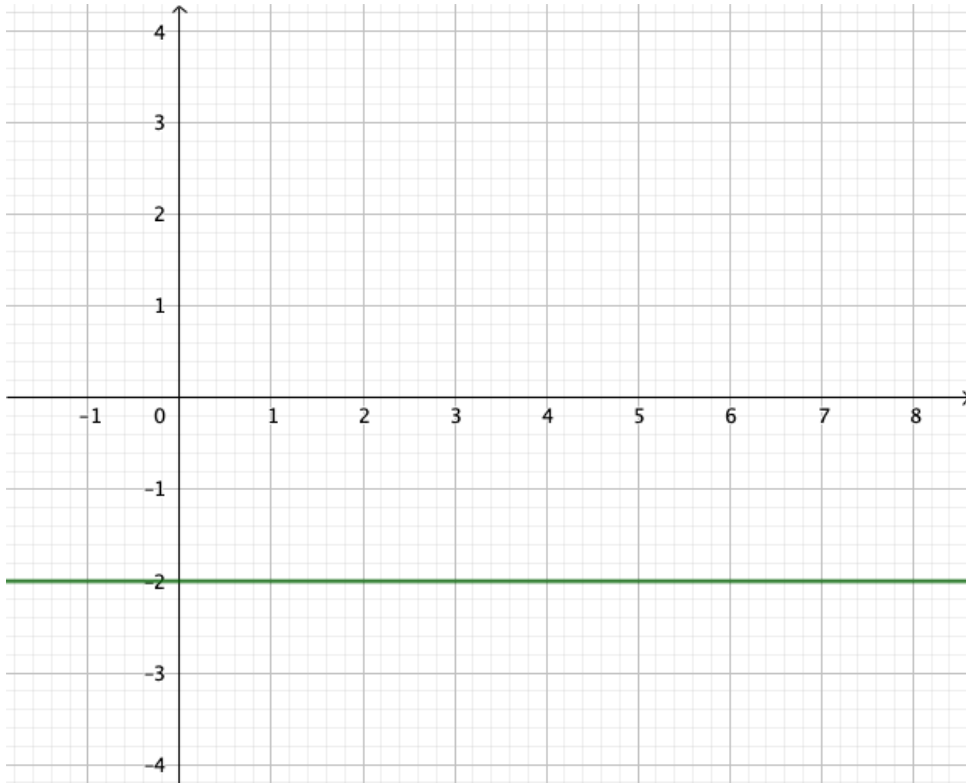
- Si $m > 0$:



- Si $m < 0$:



- Si $m = 0$:



Nuage de points

Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, la représentation graphique d'une série statistique à deux variables x et y , appelée nuage de points, est constituée de l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$ où x_i et y_i sont respectivement les valeurs prises par les variables x et y .

Droite de régression

Lorsque les points d'un nuage de points sont approximativement alignés, on peut représenter une droite appelée droite de régression de la série statistique à deux variables, qui passe au plus près des points du nuage. Cela revient à dire qu'on peut exprimer de façon approchée la variable y en fonction de la variable x sous la forme $y = ax + b$. Il faut alors déterminer a et b .

La calculatrice le permet:

Texas Instrument

1. Entrer les données dans la calculatrice.

`Stat>Edite`

- Entrer les valeurs de la variable x dans la colonne de la liste L1.
- Entrer les valeurs de la variable y dans la colonne de la liste L2.

2. Demander à la calculatrice de faire les calculs

`Stat>Calc>LinReg(ax+b)`

- Taper à la suite `L1,L2` .

Attention : la « , » n'est pas le « . ». La « , » se trouve au dessus de la touche « 7 »

Alors, s'affiche l'équation de la droite avec le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

Casio

1. Entrer les données dans la calculatrice.

Menu>Stat

- Entrer les valeurs de la variable x dans la colonne de la liste List1.
- Entrer les valeurs de la variable y dans la colonne de la liste List2.

2. Demander à la calculatrice de faire les calculs

Calc>Reg>X

Alors, s'affiche l'équation de la droite avec le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine.

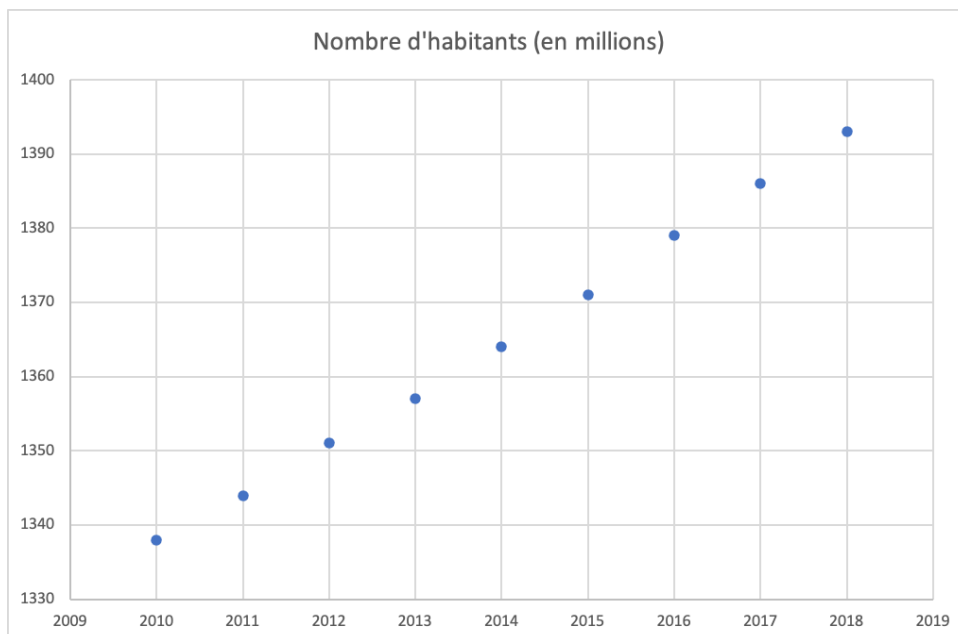
Exemple de modèle linéaire par les fonctions affines

Le tableau ci-dessous donne le nombre d'habitant en Chine.

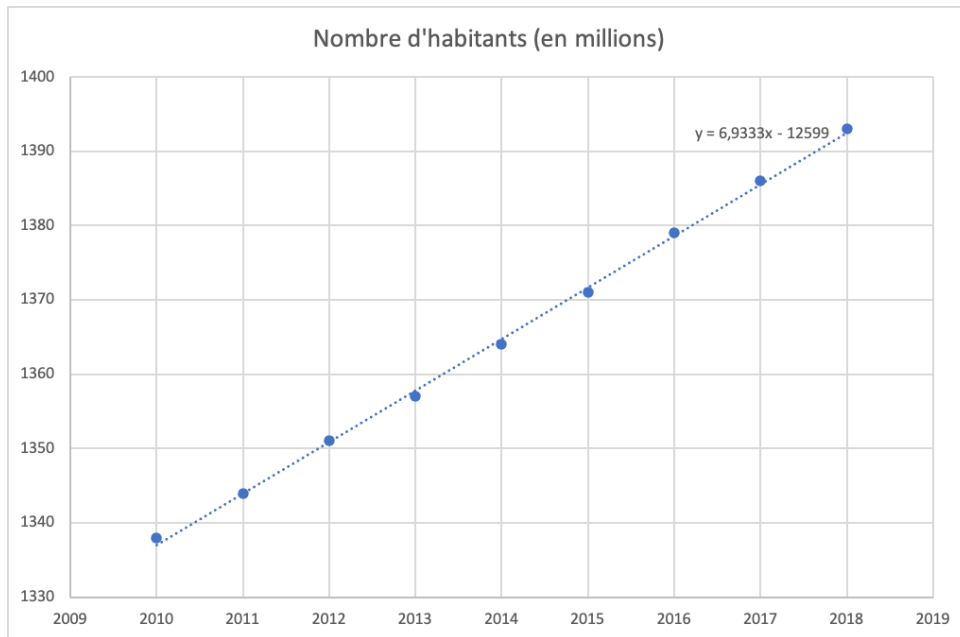
Année	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018
Nombre d'habitants (en millions)	1338	1344	1351	1357	1364	1371	1379	1386	1393

1. Etablir un nuage de points représentant le nombre d'habitants en Chine en fonction de l'année.
2. Déterminer l'équation de la droite de régression.
3. En déduire une estimation du nombre d'habitants en Chine en 2019. Vous arrondirez au million d'habitant.

1.



2.



L'équation de la droite de régression est $y = 6,9333x - 12599$.

3. En 2019, la population de la Chine en millions d'habitants est:

$$y = 6,9333 \times 2019 + 12599 = 1399$$

II. Les suites

Définition

Une suite est une fonction u dont la variable n appartient à l'ensemble des entiers naturels.

$u(n)$ s'appelle le terme général de la suite u .

Exemple:

$u : n \in \mathbb{N} \mapsto 0,3n^2 - 2 \in \mathbb{R}$ est une suite.

Les trois premiers termes de cette suite sont:

- $u(0) = 0,3 \times 0^2 - 2 = -2$
- $u(1) = 0,3 \times 1^2 - 2 = -1,7$
- $u(2) = 0,3 \times 2^2 - 2 = -0,8$

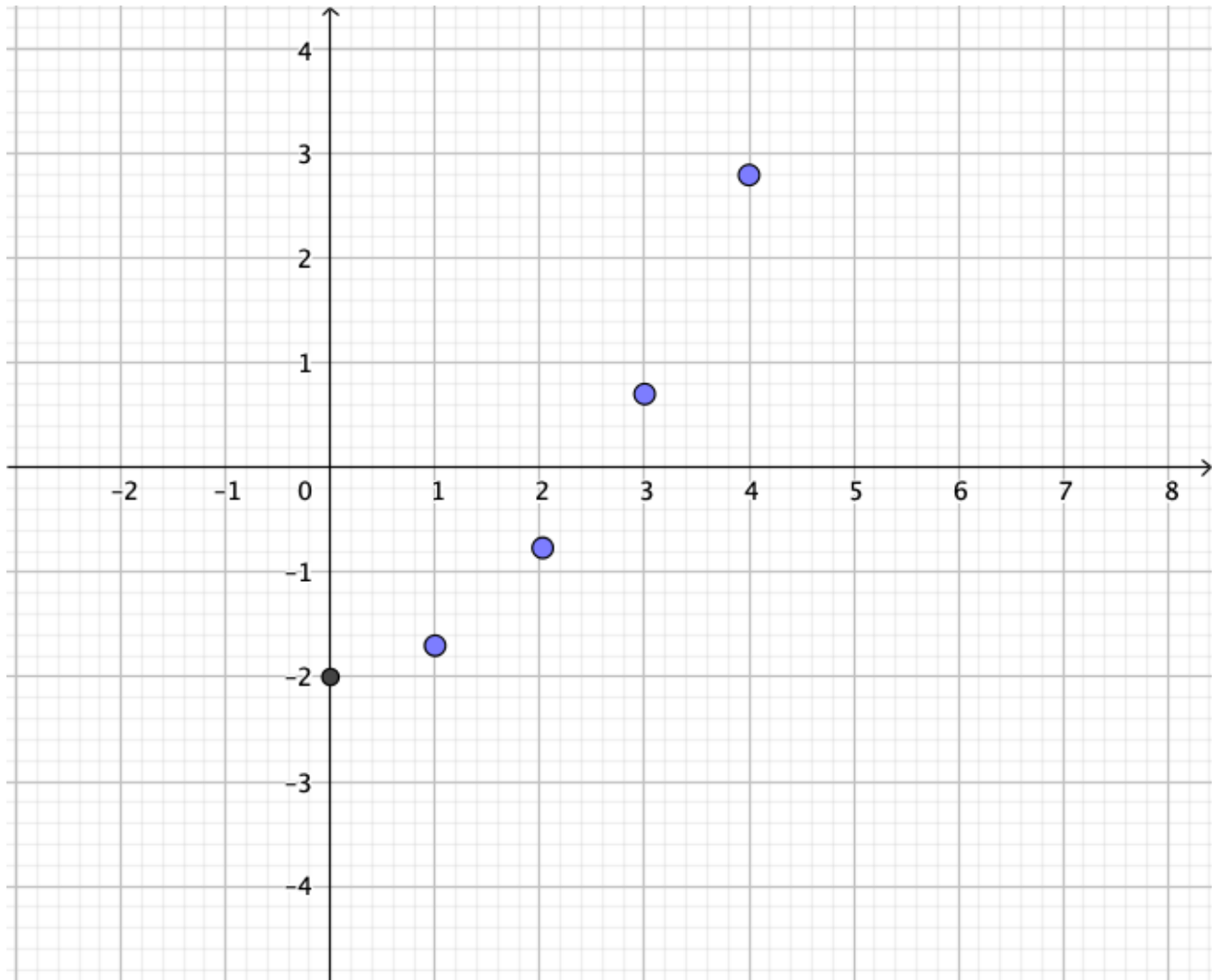
Représentation graphique

Dans un repère orthogonal, la représentation graphique d'une suite u est constituée des points de coordonnées $(n; u(n))$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exemple:

$u : n \in \mathbb{N} \mapsto 3n^2 - 2 \in \mathbb{R}$ est une suite.

Sa représentation graphique est la suivante:



III. Les suites arithmétiques

Définition

Soit r un nombre réel fixé. On dit que u est une suite arithmétique de raison r si et seulement si on obtient chaque terme de cette suite en ajoutant r au terme précédent.

On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u(n+1) = u(n) + r$.

Propriété

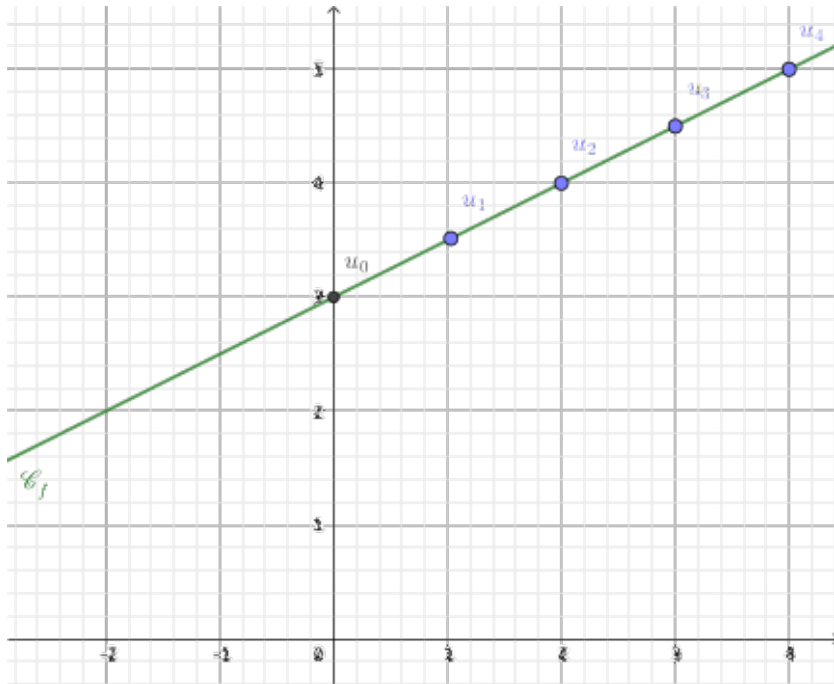
Soit u une suite arithmétique de raison r .

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u(n) = u(p) + (n - p) \times r$

En particulier $\forall n \in \mathbb{N}, u(n) = u(0) + n \times r$

Représentation graphique

La représentation graphique d'une suite arithmétique de raison r est un ensemble de points alignés. La droite passant par tous ces points est la représentation de la fonction affine définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = rx + u(0)$.



Exemple de modèle linéaire par les suites

Un particulier installe une cuve de récupération d'eaux de pluie de $50000L$. Il récupère l'eau de pluie à partir d'un toit de $60m^2$.

En janvier 2020, elle contient déjà $200L$. Dans la région où il habite, il tombe $800L$ de pluie par mètre carré et par an. De plus, chaque année, il utilise $40m^3$ d'eau de pluie.

1. Faire le bilan annuel en eau de pluie de l'habitation.
2. Soit $u(n)$ le volume d'eau en L dans la cuve lors de l'année $2020 + n$.
 - a. Exprimer $u(n)$ en fonction de n .
 - b. La suite u est-elle arithmétique? Justifier.
 - c. Estimer le volume d'eau dans la cuve en 2023.
 - d. En quelle année la cuve sera-t-elle pleine?

1. $40m^3 = 40000L$

$800 \times 60 - 40000 = 8000$. La cuve se remplit de $8000L$ par an.

2. a. $u(n) = 200 + 8000n$

b.

$$u(n+1) - u(n) = (200 + 8000(n+1)) - (200 + 8000n) = 200 + 8000n + 8000 - 200 - 8000n = 8000$$

$u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n donc la suite u est arithmétique de raison 8000 et de terme initial

$$u(0) = 200 + 8000 \times 0 = 200.$$

c. En 2023, on a $n = 3$. Il faut donc calculer $u(3) = 200 + 8000 \times 3 = 24200$.

d. On cherche à résoudre $u(n) \geq 50000$.

$$u(n) \geq 50000 \Leftrightarrow 200 + 8000n \geq 50000 \Leftrightarrow 8000n \geq 50000 - 200$$

$$\Leftrightarrow 8000n \geq 49800 \Leftrightarrow n \geq \frac{49800}{8000} \Leftrightarrow n \geq 6,225$$

La cuve sera pleine au bout de 7 ans soit en 2027.