Mathématiques complémentaires
Chapitre 02 - Modèles définis par une fonction d'une variable

Classe de terminale

I. Notion de limite

I.1. Généralités sur les limites de fonctions

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre réel de I.
On appelle limite de $f(x)$ en a la valeur ℓ vers laquelle se rapproche $f(x)$ lorsque x se rapproche de la valeur a.
On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a; +\infty[$ avec $a \in \mathbb{R}$ ou $a = -\infty$.
On appelle limite de $f(x)$ en $+\infty$ la valeur ℓ vers laquelle se rapproche $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus grand.

Définition

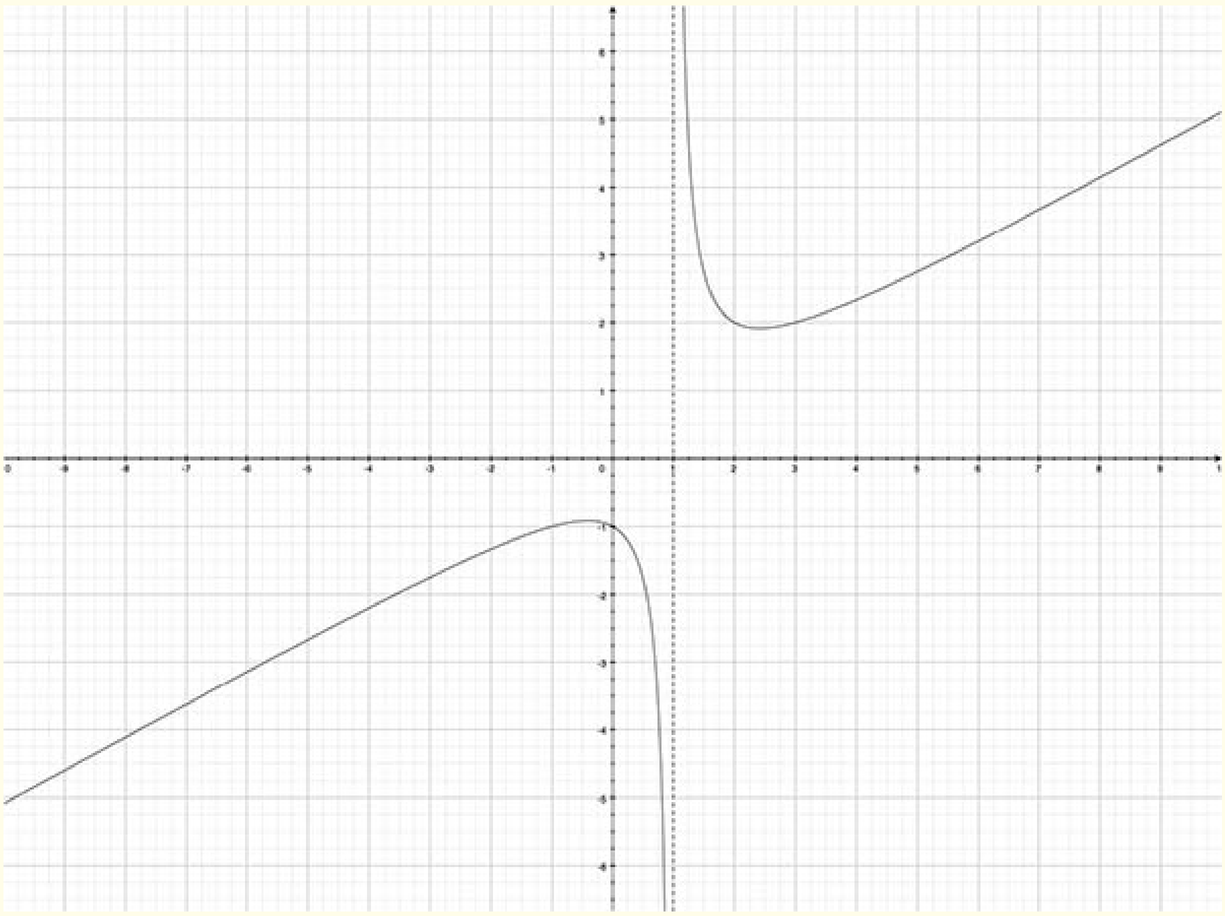
Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty; b]$ avec $b \in \mathbb{R}$ ou $b = +\infty$.
On appelle limite de $f(x)$ en $+\infty$ la valeur ℓ vers laquelle se rapproche $f(x)$ lorsque x devient de plus en plus petit.

Remarque

Dans les trois définition précédentes, on pourra assimiler ℓ à un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple

La représentation graphique ci-dessous est celle de la fonction f.



Exemple - suite

Déterminer graphiquement :

- $\lim_{x\to 3} f(x)$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x)$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x)$
- $\lim_{x\to 1} f(x)$

Réponse

- $\lim_{x\to 3} f(x) = 2$
- $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$
- On ne peut déterminer $\lim_{x\to 1} f(x)$ car on ne sait pas si on est à droite ou à gauche de la ligne pointillée d'équation $x = 1$. Il faut donc distinguer deux cas :

  - $\lim_{x\to 1 x<1} f(x) = -\infty$
  - $\lim_{x\to 1 x>1} f(x) = +\infty$

Limites des fonctions usuelles

- Fonction racine carrée
  $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$
  $\lim_{x\to 0} \sqrt{x} = 0$
- Fonction carrée
  $\lim_{x\to +\infty} x^2 = +\infty$
  $\lim_{x\to -\infty} x^2 = +\infty$
- Fonction cube
  $\lim_{x\to +\infty} x^3 = +\infty$
  $\lim_{x\to -\infty} x^3 = -\infty$
- Fonction inverse
  $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$
  $\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0$
  $\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$
  $\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$
- Fonction exponentielle
  $\lim_{x\to +\infty} e^x = +\infty$
  $\lim_{x\to -\infty} e^x = 0$

I.2. Opérations sur les limites de fonctions

Les règles opératoires sur les limites sont les suivantes :

Somme de deux limites

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit de deux limites

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Quotient de deux limites

- Cas où $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$\ell'\neq 0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

- Cas où $\lim\limits_{x\mapsto a} g(x) = 0$

Si $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) =$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{x\mapsto a} g(x) =$	0 avec| avec $g(x)0$	0 avec $g(x)0$	0 avec| $g(x)<0$	0 $g(x)<0$	0
Alors $\lim\limits_{x\mapsto a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Dans les tableaux ci-dessus :

- a peut prendre une valeur réelle, $+\infty$ ou $-\infty$.
- ℓ et ℓ' sont des nombres réels.
- FI signifie forme indéterminée. Il faut alors trouver une autre façon de déterminer la limite de la somme, produit ou quotient des deux fonctions f et g. On dit qu'il faut lever l'indétermination.

Exemple

Déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2-4x+1$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3-25x^2+754x-1$
3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{3x+5}$
4. $\lim\limits_{x\to 4 x>4} \frac{1}{2x-8}$
5. $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-5}{3x+5}$

Réponse

1. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2=+\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -4x=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2-4x=+\infty$$
   De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} 1=1$
   Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x^2-4x+1=+\infty$

2. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -25x^2=-\infty\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3-25x^2=FI$$
   Factorisons l'expression par le monôme de plus haut degré (sans son coefficient).
   $2x^3-25x^2+754x-1=x^2\left(2-25\frac{x^2}{x^3}+754\frac{x}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)=x^2\left(2-\frac{25}{x}+\frac{754}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)$
   On a maintenant :
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 2=2\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{25}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{754}{x^2}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{x^3}=0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{25}{x}+\frac{754}{x^2}-\frac{1}{x^3}=2$$
   De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$
   Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(2-\frac{25}{x}+\frac{754}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=+\infty$

3. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 7=7\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x+5=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{7}{3x+5}=0$$

4. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} 1=1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 4\\ x>4}} 2x-8=0 \text{ avec } 2x-8>0 \text{ car } x>4\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to 4 x>4} \frac{1}{2x-8}=+\infty$$

5. $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 2x-5=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3x+5=-\infty\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-5}{3x+5}=FI$$
   Factorisons le numérateur et le dénominateur par le monôme de plus haut degré.
   $\frac{2x-5}{3x+5}=\frac{x\left(2-\frac{5}{x}\right)}{x\left(3+\frac{5}{x}\right)}=\frac{2-\frac{5}{x}}{3+\frac{5}{x}}$
   Maintenant, on a :
   D'une part :
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 2=2\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{5}{x}=0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} 2-\frac{5}{x}=2$$
   D'autre part :
   $$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to-\infty} 3=3\\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x}=0\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to-\infty} 3+\frac{5}{x}=3$$
   Ainsi $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2-\frac{5}{x}}{3+\frac{5}{x}}=\frac{2}{3}$
   Ou encore $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x-5}{3x+5}=\frac{2}{3}$

I.3. Continuité

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est continue en a, un nombre réel de I si et seulement si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
On dit que f est continue sur l'intervalle I si et seulement si $\forall a \in I$ f est continue en a.

Exemple

1. Démontrer que la fonction inverse est continue en 2.
2. Démontrer que la fonction inverse n'est pas continue en 0.
3. Démontrer que la fonction inverse est continue sur $[1;2]$.

Réponse

1. Soit f la fonction inverse.
   $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2} = f(2)$
2. $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \notin \mathbb{R}$ donc la fonction inverse n'est pas continue en 0.
3. Soit $a \in [1;2]$.
   $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a} = f(a)$
   Donc la fonction f est continue sur $[1;2]$.

Remarque

Graphiquement, la continuité d'une fonction f dans un intervalle I se traduit par le fait qu'on peut tracer sa courbe représentative sur I sans lever le crayon.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre réel de I.

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a.
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I.

Remarque

Les fonctions carrée, cube, exponentielle, affine et linéaire sont dérivables sur $\mathbb{R}$ (ou un intervalle de $\mathbb{R}$) donc continues sur ce même intervalle.
La fonction inverse est dérivable sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ et donc continue sur ces deux intervalles.
La fonction racine carrée est dérivable sur $]0;+\infty[$ et donc continue sur cet intervalle.

Exemple

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 3x-2 \ si \ x < 2 \\ x^2 \ si \ x \geq 2 \end{cases}$

   La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \begin{cases} x^2 \ si \ x < 0 \\ x+1 \ si \ x \geq 0 \end{cases}$

   La fonction g est-elle continue ?

Réponse

1. La fonction f est dérivable sur $]-\infty;2[$ car c'est une fonction affine sur cet intervalle donc continue sur $]-\infty;2[$.
   La fonction f est dérivable sur $]2;+\infty;[$ car c'est la fonction carrée sur cet intervalle donc continue sur $]2;+\infty;[$.
   Il reste donc à savoir si la fonction f est continue en 2.
   $\lim\limits_{x \to 2 x<2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2 x<2} 3x-2 = 4$
   $\lim\limits_{x \to 2 x>2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2 x>2} x^2 = 4$
   $f(2) = 2^2 = 4$
   Donc $\lim\limits_{x \to 2 x<2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2 x>2} f(x) = f(2)$
   La fonction f est donc continue en 2.
   La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction g est dérivable sur $]-\infty;0[$ car c'est la fonction carrée sur cet intervalle donc continue sur $]-\infty;0[$.
   La fonction g est dérivable sur $]0;+\infty;[$ car c'est une fonction affine sur cet intervalle donc continue sur $]0;+\infty;[$.
   Il reste donc à savoir si la fonction g est continue en 0.
   $\lim\limits_{x \to 0 x<0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0 x<0} x^2 = 0$
   $\lim\limits_{x \to 0 x>0} g(x) = \lim\limits_{x \to 2 x>2} x+1 = 1$
   $g(0) = 0+1 = 1$
   Donc $\lim\limits_{x \to 0 x<0} f(x) \neq g(0)$
   La fonction f n'est donc pas continue en 0.
   La fonction f n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$.

I.4. Asymptotes

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I. Soit $a \in I$ un nombre réel.
Si la fonction f possède une limite infinie en a (éventuellement à droite ou à gauche), on dit que dans un repère orthonormé, la droite d d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe représentative de f.

Définition

Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
Si la fonction f possède une limite réelle l en $+\infty$ ou $-\infty$, on dit que dans un repère orthonormé, la droite d d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe représentative de f.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $]-\infty;3[\cup]3;+\infty$ par $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-9}$.

1. (a) Déterminer les limites de $f(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$.
   (b) Déterminer $\lim\limits_{x\to 3 x>3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3 x<3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to -3 x>3} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to -3 x<3} f(x)$.
2. En déduire les équations des éventuelles asymptotes.

Réponse

1. (a)
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-1=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2-9=+\infty\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2-9}=FI$$
Factorisons le numérateur et le dénominateur par x^2.
$$\frac{x^2-1}{x^2-9}=\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1-\frac{9}{x^2}\right)}=\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}$$
Or
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x^2}=1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{9}{x^2}=1\end{array}\right\}\text{ donc } \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{1-\frac{9}{x^2}}=1$$
Ou encore $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2-9}=1$.

   (b) $\lim\limits_{x\to 3 x>3} x^2-1=8$ $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} x^2-9=0\\ x^2-9>0\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}} f(x)=+\infty$ De même :
$\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x<3}} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x>3}} f(x)=-\infty$
$\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ x<3}} f(x)=+\infty$

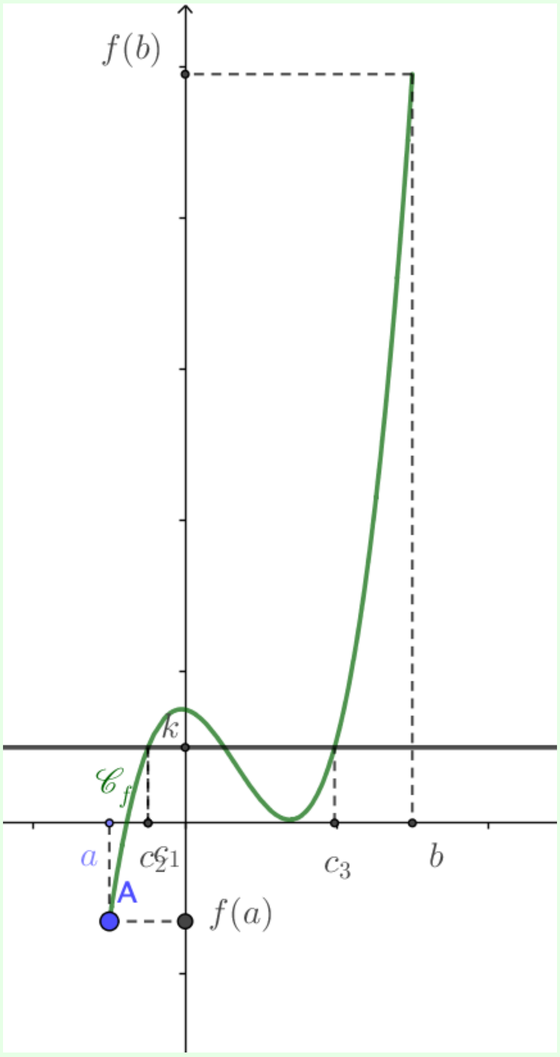
2. On a donc une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ d'équation $y=1$ et deux asymptote verticales à $\mathcal{C}_f$ d'équations respectives $x=3$ et $x=-3$.

I.5. Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que $a < b$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Interprétation graphique



Exemple

Démontrer que l'équation $e^x = 2$ admet au moins une solution sur $[0; +\infty[$.

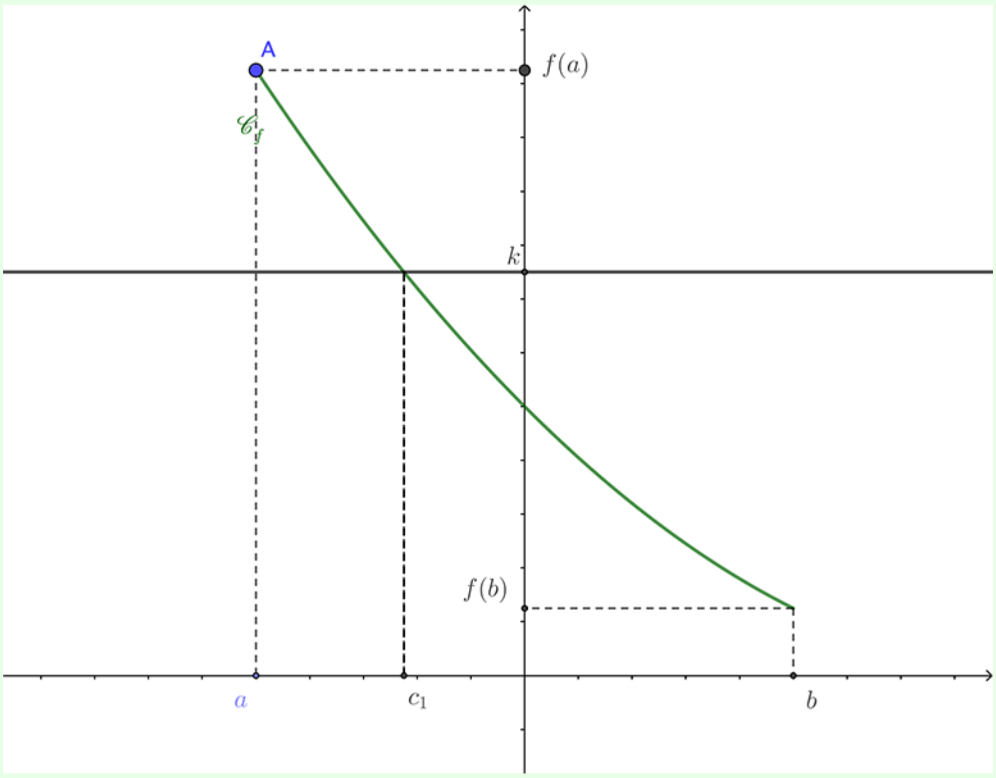
Réponse

$e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$
Or $2 \in [1; +\infty[$ donc l'équation $e^x = 2$ admet au moins une solution sur $[0; +\infty[$.

Propriété

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a;b]$.

Interprétation graphique



Exemple

Démontrer que l'équation $e^x = 2$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$.

Réponse

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $[0;+\infty[$.
$e^0 = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
Or $2 \in [1;+\infty[$ donc l'équation $e^x = 2$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$.

II. Dérivation

II.1. Rappels : tableau des dérivées, opérations sur les dérivées, sens de variation et extrema locaux

Dérivées des fonctions usuelles

la fonction f définie par :	sur	fonction dérivée définie par	sur
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$**(fonction constante)**	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$ **(fonction affine)**	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$**(fonction carrée)**	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$**(fonction cube)**	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$**(fonction puissance)**	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \frac{1}{x}$**(fonction inverse)**	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$**(fonction racine carrée)**	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos x$**(fonction cosinus)**	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$**(fonction sinus)**	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = e^x$**(fonction exponentielle)**	$\mathbb{R}$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivées

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Soit $k \in \mathbb{R}$.

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée	Remarque
Dérivée d'une somme	$u + v$	$u' + v'$	
Dérivée d'une différence	$u - v$	$u' - v'$	
Dérivée du produit par une constante	ku	ku'	
Dérivée du produit	$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$	
Dérivée de l'inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	v ne doit pas s'annuler sur I
Dérivée du quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	v ne doit pas s'annuler sur I

Sens de variation

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.

- $\forall x \in I, f'(x) > 0 \iff f$ est strictement croissante.
- $\forall x \in I, f'(x) < 0 \iff f$ est strictement décroissante.
- $\forall x \in I, f'(x) = 0 \iff f$ est constante.

Remarque

$\forall x \in I, f'(x) \leqslant 0 \iff f$ est décroissante.
$\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0 \iff f$ est croissante.

Extrema locaux

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
La fonction f admet un extremum local si et seulement si $\exists x_0 \in I, f'(x)$ change de signe en x_0 et $f'(x_0) = 0$

Remarque

Il existe deux types d'extrema : le maximum et le minimum.

Equation de la tangente $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Soit $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthonromé. L'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

II.2. Fonction dérivée de $x \mapsto f(ax+b)$, $x \mapsto e^{u(x)}$ et $x \mapsto [u(x)]^2$

Propriété

Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit g la fonction définie sur un intervalle J par $g(x) = f(ax+b)$ avec, $\forall x \in J, ax+b \in I$.
La fonction g est dérivable sur J et $\forall x \in J, g'(x) = af'(ax+b)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{3x-7}$.

1. Déterminer $f'(x)$.
2. En déduire l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

Réponse

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f'(x) = 3e^{3x-7}$
2. $f'(2) = 3e^{3\times 2-7} = 3e^{-1} = \frac{3}{e}$
   $f(2) = e^{3\times 2-7} = e^{-1} = \frac{1}{e}$
   Donc l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 est :
   $y = f'(2)(x-2) + f(2)$
   $y = \frac{3}{e}(x-2) + \frac{1}{e}$
   $y = \frac{3}{e}x - \frac{6}{e} + \frac{1}{e}$
   $y = \frac{3}{e}x - \frac{5}{e}$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par $f(x) = e^{u(x)}$.
La fonction f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$.

Démonstration

Soit $a \in I$.
Calculons $\lim\limits_{h \mapsto 0} \frac{e^{u(a+h)} - e^{u(a)}}{h}$
Calcul préliminaire :

$$\lim_{k \mapsto 0} \frac{e^k - 1}{k} = \lim_{k \mapsto 0} \frac{e^{0+k} - e^0}{k} = exp'(0) = e^0 = 1$$

$$e^{u(a+h)} - e^{u(a)} = e^{u(a+h)-u(a)+u(a)} - e^{u(a)} = e^{u(a+h)-u(a)}e^{u(a)} - e^{u(a)} = e^{u(a)}\left(e^{u(a+h)-u(a)} - 1\right)$$

$$\frac{e^{u(a+h)} - e^{u(a)}}{h} = \frac{e^{u(a+h)} - e^{u(a)}}{u(a+h) - u(a)} \times \frac{u(a+h) - u(a)}{h}$$

Démonstration - suite

Or $\lim\limits_{h\mapsto 0} \frac{u(a+h)-u(a)}{h} = u'(a)$
De plus $\lim\limits_{h\mapsto 0} u(a+h)-u(a) = 0$
En posant $x = u(a+h)-u(a)$, on a $\lim\limits_{h\mapsto 0} x = 0$
Et donc $\lim\limits_{h\mapsto 0} \frac{e^{u(a+h)-u(a)}-1}{u(a+h)-u(a)} = \lim\limits_{x\mapsto 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$
Ainsi $\lim\limits_{h\mapsto 0} \frac{e^{u(a+h)}-e^{u(a)}}{h} = e^{u(a)} \times 1 \times u'(a) = u'(a) \times e^{u(a)}$

Donc $\forall a \in I, \lim\limits_{h\mapsto 0} \frac{e^{u(a+h)}-e^{u(a)}}{h} = u'(a) \times e^{u(a)}$
D'où $\forall a \in I, f'(a) = u'(a) \times e^{u(a)}$
Ainsi $\forall x \in I, f'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2}$.
Déterminer, si possible, $f'(x)$.

Réponse

Posons $u(x) = x^2$. La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et : $f'(x) = 2x \times e^{x^2} = 2xe^{x^2}$

Propriété

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit f la fonction définie sur l'intervalle I par $f(x) = [u(x)]^2$.
La fonction f est dérivable sur I et $\forall x \in I, f'(x) = 2u'(x) \times u(x)$.

Exemple

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - e^x\right)^2$.
Déterminer, si possible, $f'(x)$.

Réponse

Posons $u(x) = x^2 - e^x$.
La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a $u'(x) = 2x - e^x$.
La fonction f est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 2u'(x) \times u(x) = 2\left(2x - e^x\right)\left(x^2 - e^x\right)$$

II.3. Fonctions convexes

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
On dit que f est convexe sur I si et seulement si pour tous point A et B de $\mathcal{C}_f$, le segment $[AB]$ est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ entre A et B.
On dit que f est concave sur I si et seulement si pour tous point A et B de $\mathcal{C}_f$, le segment $[AB]$ est en-dessous de $\mathcal{C}_f$ entre A et B.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
La fonction f est convexe sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ est entièrement au-dessus de chacune de ses tangentes.
La fonction f est concave sur I si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ est entièrement en-dessous de chacune de ses tangentes.

Remarque

- Les fonctions carrée et exponentielles sont convexes sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carrée est concave sur $[0;+\infty[$.
- La fonction inverse est concave sur $]-\infty;0[$ et convexe sur $]0;+\infty[$.
- La fonction cube est concave sur $]-\infty;0]$ et convexe sur $[0;+\infty[$.

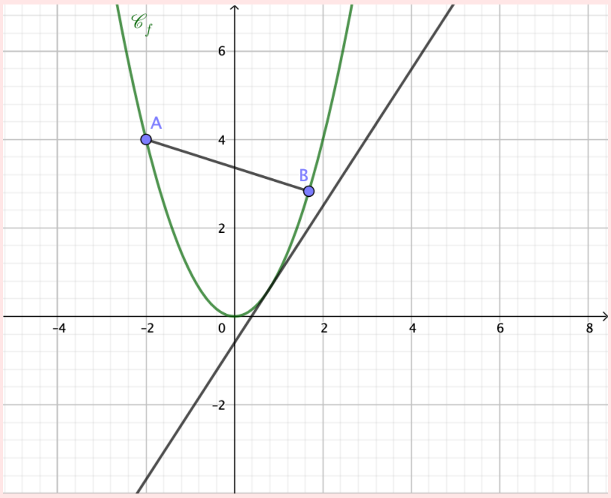


Figure 1 – Fonction carrée

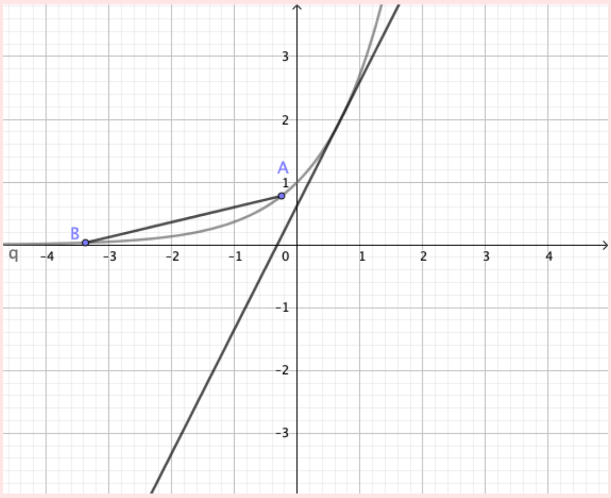


Figure 2 – Fonction exponentielle

Remarque - suite

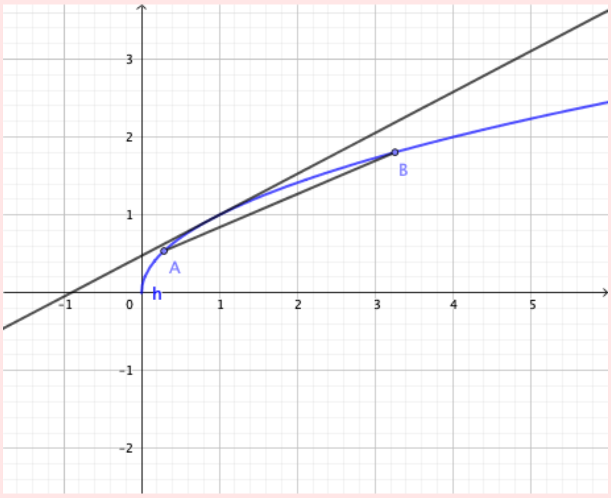


Figure 3 – Fonction racine carrée

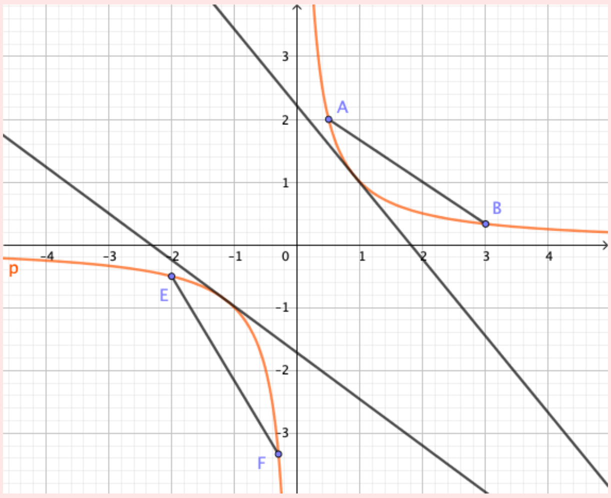


Figure 4 – Fonction inverse

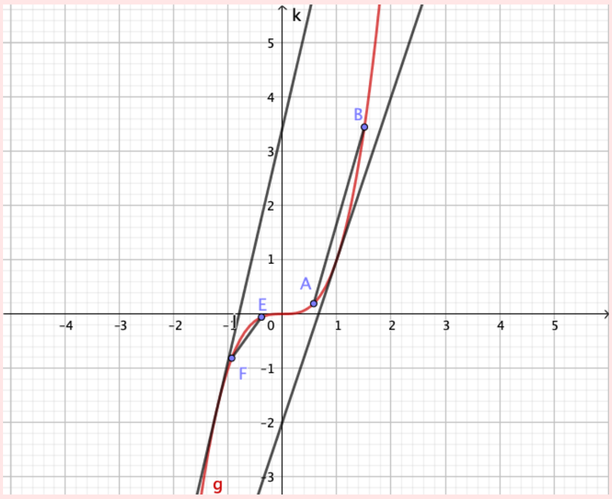


Figure 5 – Fonction cube

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
On dit que la fonction f est deux fois dérivable sur I si et seulement si la fonction f' est dérivable sur I.
La dérivée de f', notée f'', est appelée dérivée seconde de la fonction f.

Exemple

Déterminer la dérivée seconde, si elle existe, de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - 2e^x + 1$.

Réponse

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3 \times 2x - 2e^x = 6x - 2e^x$
La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
$f''(x) = 6 - 2e^x$

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe sur I si et seulement si la fonction f' est croissante sur I.
- La fonction f est concave sur I si et seulement si la fonction f' est décroissante sur I.

Propriété

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- La fonction f est convexe sur I si et seulement si la fonction $\forall x \in I, f''(x) \geq 0$.
- La fonction f est concave sur I si et seulement si la fonction $\forall x \in I, f''(x) \leq 0$.

Exemple

Soit f la fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = e^{x^2}$.
Donner la convexité de la fonction f.

Réponse

f étant deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

Et en posant $u(x) = 2x$ et $v(x) = e^{x^2}$, on a $u'(x) = 2$ et $v'(x) = 2xe^{x^2}$.
Ainsi :

$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2 \times e^{x^2} + 2x \times 2xe^{x^2}$$

$$f''(x) = e^{x^2}\left(2 + 4x^2\right)$$

Or $\forall x \in \mathbb{R}, e^{x^2} > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, 2 + 4x^2 > 0$
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) > 0$.
Ainsi la fonction f est convexe.

II.4. Point d'inflexion

Définition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Le point $A\left(a; f(a)\right)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si la courbe $\mathcal{C}_f$ traverse sa tangente au point A.

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Soit $a \in I$. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.
Le point $A\left(a; f(a)\right)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si f'' s'annule en a en changeant de signe.

Exemple

Soit f la fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 5$.

1. Calculer $f''(x)$.
2. En déduire que $\mathcal{C}_f$, la courbe représentative de la fonction f, admet un point d'inflexion dont vous donnerez les coordonnées.
3. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point d'inflexion.

Réponse

1. f étant deux fois dérivable, on a :

$$f'(x) = 3x^2 - 4x + 3$$

puis

$$f''(x) = 6x - 4$$

2.

$$f''(x) = 0 \iff 64 - 4 = 0 \iff 6x = 4 \iff x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$\mathcal{C}_f$ admet bien un point d'inflexion d'abscisse $\frac{2}{3}$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right) - 5$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{8}{9} + 2 - 5$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{27} - \frac{24}{27} + \frac{54}{27} - \frac{135}{27} = -\frac{97}{27}$$

Les coordonnées du point d'inflexion sont $\left(\frac{2}{3}; -\frac{97}{27}\right)$.

3.

$$f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) + 3 = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + \frac{9}{3} = \frac{5}{3}$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{97}{27}$$

Donc l'équation réduite de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'inflexion est :

$$y = f'\left(\frac{2}{3}\right)\left(x - \frac{2}{3}\right) + f\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$y = \frac{5}{3}\left(x - \frac{2}{3}\right) - \frac{97}{27}$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{10}{9} - \frac{97}{27}$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{30}{27} - \frac{97}{27}$$

$$y = \frac{5}{3}x - \frac{127}{27}$$

III. Exemples de problèmes

III.1. Modèle issu de contextes physiques : les marées

Le phénomène des marées est dû à l'attraction de la Lune et du Soleil sur les océans. Cette attraction varie en fonction de la position de la Lune par rapport à la Terre. C'est pour cela que les marées ont lieu à des moments différents à la surface de la Terre en raison de sa rotation.
Comme la Lune se retrouve « au même endroit » par rapport à la Terre toutes les 24 h 50 min, il y a chaque jour un décalage de 50 min de l'heure des marées.
Nous allons modéliser ce phénomène à travers une fonction, afin d'en étudier les particularités.

Partie A : modélisation par une fonction

1. Un 24 juin à 10 h 30, la hauteur d'eau, en m, dans un port peut être modélisée par la fonction h définie ci-dessous sur $[0;12]$ et où t désigne la durée, en h, qui s'est écoulée depuis 1O h 30.
$$\begin{cases} h(t) &= -\frac{1}{40}t^3 + \frac{9}{10}t^2 + 1,6 \; si \; 0 \leq t \leq 6 \\ h(t) &= \frac{1}{40}t^3 + \frac{27}{40}t^2 + 5,4 \; si \; 6 < t \leq 12 \end{cases}$$
   (a) Afficher la courbe représentative de la fonction h à l'écran de la calculatrice.
   (b) La fonction h est-elle continue sur $[0;12]$?

2. (a) f est la fonction définie sur l'intervalle $[0;6]$ par $f(t) = h(t)$ et g est la fonction définie sur l'intervalle $]6;12]$ par $g(t) = h(t)$.
   Etudier les variations de la fonction f sur $[0;6]$, puis les variations de la fonction g sur $]6;12]$.
   (b) Démontrer que l'équation $h(t) = 3,5$ admet deux solutions α et β dans $[O;12]$ avec $\alpha < \beta$.
   (c) A l'aide de la calculatrice, donner l'arrondi au centième de α et de β.
   (d) Un bateau ne peut rentrer dans le port que si la hauteur d'eau est supérieure à 3,5 m.
   Déterminer la période pendant laquelle ce bateau pourra rentrer dans le port.

Partie B : étude du marnage de cette marée

Le marnage est la différence entre la hauteur d'eau minimum dans le port et la hauteur d'eau maximum.
Calculer le marnage de cette marée.

Partie C : lien avec la règle « des douzièmes »

Ce tableau résume la règle « des douzièmes » qui est utilisée par les navigateurs pour déterminer la hauteur d'eau dans un port afin de savoir s'ils peuvent ou non naviguer dans le port.

1. Recopier ce tableau, puis compléter la dernière ligne qui concerne la marée étudiée.

Durée en h, écoulée depuis le début de la marée	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Variation de la hauteur d'eau en fraction de marnage pendant cette heure	0	$+\frac{1}{12}$	$+\frac{2}{12}$	$+\frac{3}{12}$	$+\frac{3}{12}$	$+\frac{2}{12}$	$+\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{2}{12}$	$-\frac{3}{12}$	$-\frac{3}{12}$	$-\frac{2}{12}$	$-\frac{1}{12}$
hauteur de la mer dans le port													

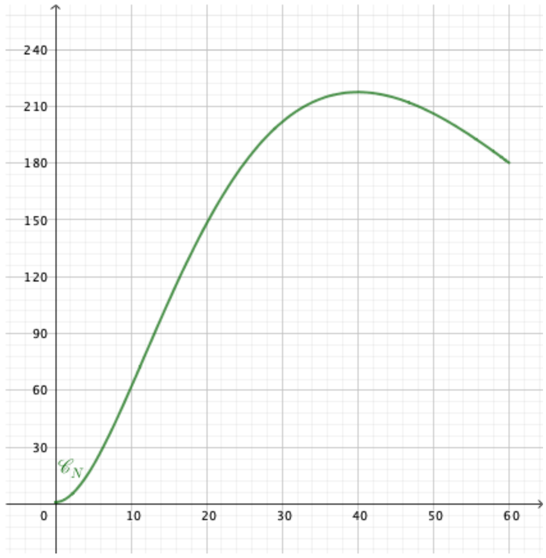
2. Vérifier que la fonction h donne, pour cette marée, les mêmes hauteurs d'eau que la règle « des douzièmes » pour les durées 0 ; 3 ; 6 ; 9 et 12.

III.2. Modèle issu de contextes biologiques : épidémie

Un virus est présent à l'état latent chez quelques habitants d'une région.
Suite à une mutation du virus, le nombre de personnes infectées, en centaine, évolue selon le modèle suivant : $N(t) = t^2 e^{-0,05t} + 1$, où t est le temps écoulé, en jour, depuis la mutation du virus, $t \in [0; 60]$.
Nous allons étudier l'évolution du nombre d'individus infectés afin de limiter la propagation de ce virus.

1. Etat initial
   Déterminer le nombre de personnes infectées, lorsque le virus est à l'état latent.

2. Conjectures graphiques
   La courbe $\mathcal{C}_N$ ci-dessous représente la fonction N dans un repère.



   Avec la précision permise par le graphique, conjecturer :

   (a) une valeur approchée du nombre d'individus infectés lors du pic de l'épidémie.
   (b) au bout de combien de jours le nombre d'individus infectés a commencé à diminuer.
   (c) la durée, en jour, pendant laquelle la croissance du nombre d'individus infectés s'est accélérée.

3. Démonstrations des conjectures

   (a) Déterminer $N'(t)$ et dresser le tableau de variations de N sur $[0; 60]$.
   (b) Préciser les conjectures émises aux questions 2. a) et b).
   (c) Vérifier que pour tout réel t de $[0; 60]$, $N''(t) = (0,0025t^2 - 0,2t + 2)\, e^{-0,05t}$.
   (d) Voici la fonction 'seuil()' ci-dessous, écrite en langage Python.

```
def seuil(M):
x=0
while 0.0025*x**2-0.2*x+2>M:
    x=x+0.01
return x
```

   Saisir `seuil(0)` dans la console Python.
   Expliquer pourquoi la valeur approchée affichée permet de valider la réponse à la quest ion 2.(c).

   (e) Factoriser $N''(t)$. En déduire la valeur exacte de l'abscisse du point d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_N$.

III.3. Modèle issu de contexte mathématique : trouver une valeur approchée par dichotomie

Il s'agit de déterminer une valeur approchée d'une solution de l'équation $x^3 + x - 1 = 0$ par une méthode de dichotomie.

1. On pose la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x - 1$$

   Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$ et que $\alpha \in [0; 1]$.

2. On veut obtenir un encadrement de α.
   On procède alors par dichotomie, c'est-à-dire qu'on partage l'intervalle $[0; 1]$ en deux intervalles $I_1 = [0; \frac{1}{2}]$ et $I_2 = [\frac{1}{2}; 1]$.

   (a) Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$.
   Dire pourquoi α se trouve dans l'intervalle I_2.

   (b) On réitère le procédé en partageant l'intervalle I_2 en deux : $I_3 = [\frac{1}{2}; \frac{3}{4}]$ et $I_4 = [\frac{3}{4}; 1]$.
   Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$.
   Dans quel intervalle, I_3 ou I_4, se trouve α ?

3. On décide d'automatiser ce procédé pour que α se trouve dans un intervalle d'amplitude inférieure à 10^{-3}.
   On donne le programme en Python suivant.

```python
def f(x):
    return x**3+x-1

def dicho(a,b):
    n=0
    while b-a>=10**(-3):
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<0:
            b=c
        else:
            a=c
        n=n+1
    return a,b,n
```

   (a) Que représentent les paramètres a et b de la fonction 'dicho' ?

   (b) Quelles valeurs doit-on utiliser pour a et pour b lorsqu'on demande à exécuter la fonction 'dicho' pour résoudre $f(x) = 0$?

   (c) Que représente la variable n ?

   (d) Expliquer les lignes du programme suivantes :

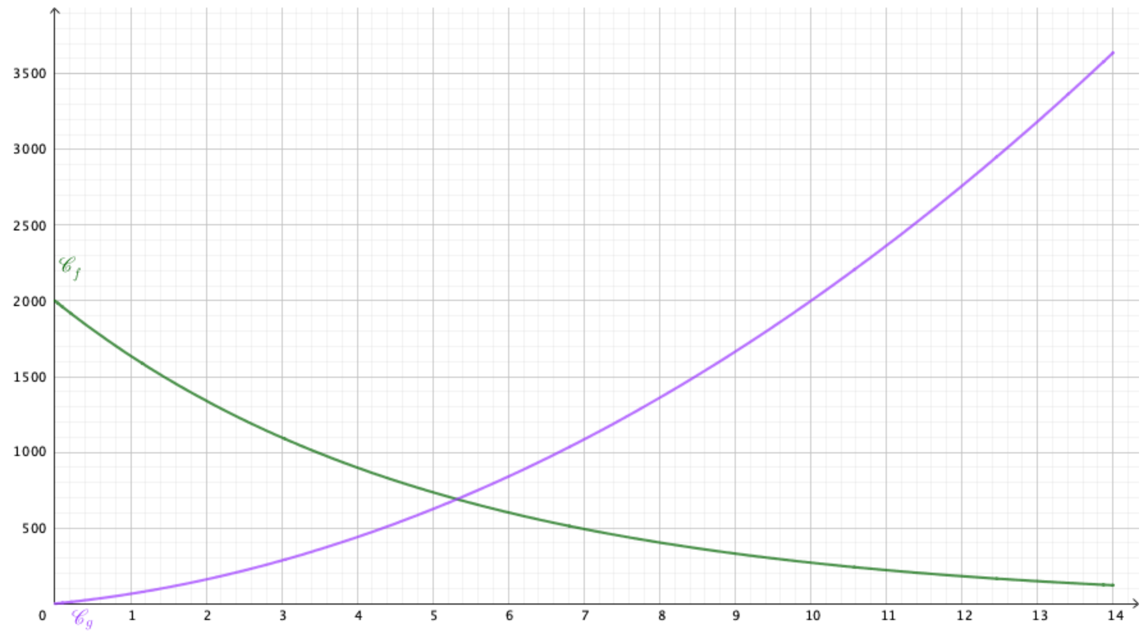
```python
if f(a)*f(c)<0:
    b=c
else:
    a=c
```

   (e) Rentrer ce programme dans votre calculatrice et donner un encadrement à 10^{-3} de la valeur α. En combien d'itérations est-il obtenu ?

   (f) Que faut-il modifier pour avoir un encadrement à 10^{-6} ? Donner alors cet encadrement ainsi que le nombre d'itérations nécessaires.

III.4. Modèle issu de contexte économique : production

Une usine qui fabrique un produit A, décide de fabriquer un nouveau produit B afin d'augmenter son chiffre d'affaires.
La quantité, exprimée en tonnes, fabriquée par jour par l'usine est modélisée par les fonctions f, pour le produit A, et g, pour le produit B, définies sur $I = [O; 14]$ définies par $f(x) = 2000e^{-0,2x}$ et $g(x) = 15x^2 + 50x$, où x est la durée écoulée depuis le lancement du nouveau produit B exprimée en mois.
Leurs courbes représentatives respectives $\mathcal{C}_f$, et $\mathcal{C}_g$ sont données ci-dessous.



1. Sur le graphe, qu'a-t-on représenté en abscisses ? En ordonnées ?
   Par lecture graphique et avec la précision permise par le graphique, déterminer la durée nécessaire pour que la quantité de produit B dépasse celle du produit A.

2. Pour tout nombre réel x de l'intervalle I, on pose :

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

   On admet que la fonction h est dérivable sur I.

   (a) Que modélise cette fonction dans le contexte de l'exercice ?

   (b) Montrer que, pour $x \in I$:
   $$h'(x) = -400e^{-0,2x} - 30x - 50$$

   (c) En déduire que la fonction h est décroissante sur I.

   (d) On donne $h(0) = 2000$ et $h(14) \approx -3518$.
   Justifier que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur I et donner un encadrement d'amplitude $0,1$ de α.

   (e) Résoudre alors $g(x)f(x)$ et retrouver le résultat de la question 1.