Chapitre 05 - Répétition d'expériences indépendantes - échantillonnage

I - Loi uniforme discrète sur $\{1; 2; \ldots; n\}$

Définition

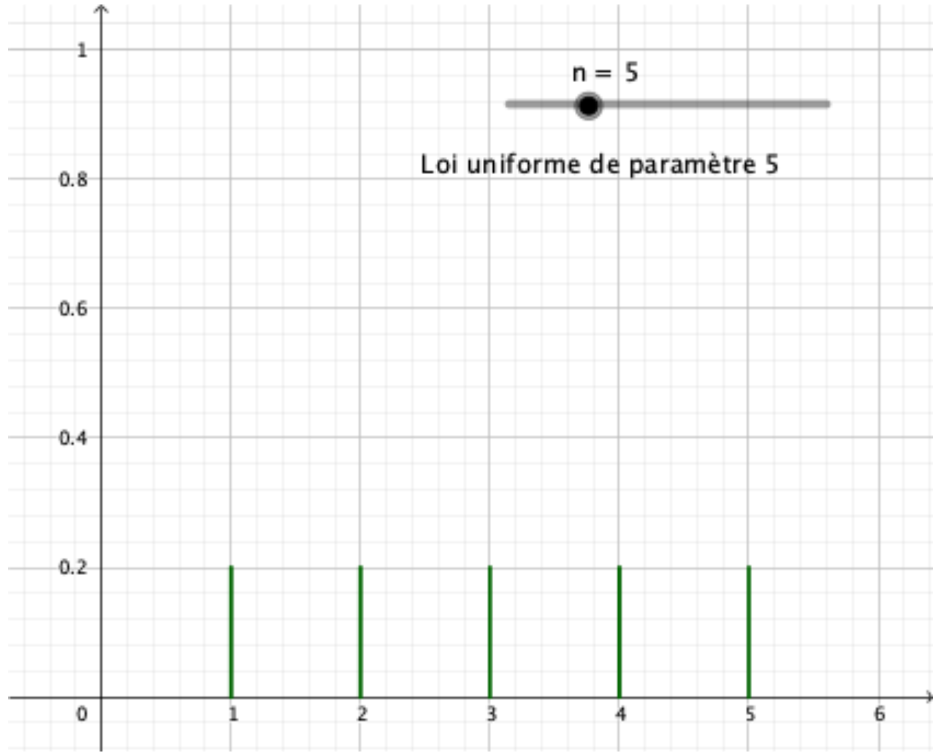
> Soit X une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans $\{1; 2; \ldots; n\}$, avec $n \in \mathbb{N}$.
> On dit que la loi de probabilité de X suit une loi uniforme sur $\{1; 2; \ldots; n\}$ lorsque toutes les valeurs prises par X sont équiprobables.
> Ainsi, on a $\forall k \in \{1; 2; \ldots; n\}, \mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$.

Exemple

1. On lance une pièce équiibrée. On gagne 1€ si on obtient Pile et 2€ si on obtient Face.
   On appelle X la variable aléatoire correspondant au gain lors d'un lancer d'une pièce.
   La variable X suit-elle une loi uniforme discrète?
2. Dans une urne, trois boules sont numérotée "1" et 2 boules sont numérotées "2". On appelle Y la variable aléatoire qui prend comme valeur le numéro indiqué sur la boule tirée.
   La variable Y suit-elle une loi uniforme discrète?

> > 1. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\{1; 2\}$.
> > $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$
> > $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$
> >   Donc $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 2) = \frac{1}{2}$
> >   Ainsi la variable aléatoire X suit une loi uniforme discrète sur $\{1; 2\}$.
> > 2. La variable aléatoire X prend ses valeurs dans $\{1; 2\}$.
> > $\mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{5}$
> > $\mathbb{P}(X = 2) = \frac{2}{5}$
> >   Donc $\mathbb{P}(X = 1) \neq \mathbb{P}(X = 2)$
> >   Ainsi la variable aléatoire Y ne suit pas une loi uniforme discrète.

Graphiquement



Propriété

> Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $\{1; 2; \ldots; n\}$.
> L'espérance de X est $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$.

démonstration

> On a la loi uniforme discrète sur $\{1; 2; \ldots; n\}$. On peut donc faire le tableau suivant:
>
> | x_i | **1** | **2** | **...** | **n** |
> |---|---|---|---|---|
> | $\mathbb{P}(X = x_i)$ | $\frac{1}{n}$ | $\frac{1}{n}$ | ... | $\frac{1}{n}$ |
>
> Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{n} \times 1 + \frac{1}{n} \times 2 + \ldots + \frac{1}{n} \times n = \frac{1}{n} \times (1 + 2 + \ldots + n) = \frac{1}{n} \times \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$.

Exemple

Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X de l'exemple précédent.

> > La variable aléatoire X suit une loi uniforme discrète sur $\{1; 2\}$.
> > Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

II - Loi de Bernoulli

Définition

> Une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une est appelée succès (S) et l'autre échec $(\overline{S})$.

Exemple

On lance un dé à 6 faces parfaitement équilibré. On appelle succès la sortie du nombre 5 et échec la sortie des nombres 1,2,3,4 et 6. Quelle est la probabilité d'un succès ? d'un échec ?

> > $\mathbb{P}(S) = \frac{1}{6}$
> > $\mathbb{P}(\overline{S}) = \frac{5}{6}$

Définition

> On considère une épreuve de Bernoulli.
> Soit $p(0 \leq p \leq 1)$ la probabilité d'obtenir un succès.
> X est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec. La loi de probabilité de X, présentée dans le tableau ci-dessous, est appelée loi de Bernoulli de paramètre p.
>
> | k | 0 | 1 |
> |---|---|---|
> | $\mathbb{P}(X = k)$ | $1 - p$ | p |

Exemple

Une classe comprend 60% de filles. On désigne au hasard un élève de la classe et on note s'il s'agit d'une fille.

1. S'agit-il d'une épreuve de Bernouilli ? Quel est son paramètre ?
2. Soit X la varaible aléatoire qui prend 1 comme valeur si l'élève choisi est une fille, 0 sinon. Déterminer la loi de probabilité de cette expérience.

> > 1. Il s'agit bien d'une épreuve de Bernoulli car soit l'élève désigné est une fille soit c'est un garçon. Le succès est « l'élève désigné est une fille » et l'échec est « l'élève désigné est un garçon ».
> > 2.
> >
> > | k | 0 | 1 |
> > |---|---|---|
> > | $\mathbb{P}(X = k)$ | $0,4$ | $0,6$ |
> >
> > La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $0,6$.

Propriété

> Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de Bernoulli de paramètre p.
> On a:
> $\mathbb{E}(X) = p$
> $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$
> $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$

Démonstration

> On a:
>
> | k | 0 | 1 |
> |---|---|---|
> | $\mathbb{P}(X = k)$ | $1 - p$ | p |
>
> Donc $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$

> $\mathbb{V}(X) = (1-p)\times(0-p)^2 + p\times(1-p)^2 = p^2(1-p) + p(1-p)^2 = p(1-p)(p+1-p) = p(1-p)$
> $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)} = \sqrt{p(1-p)}$

Exemple

Déterminer l'espérance, la variance et l'écart type de la variable aléatoire X de l'exemple précédent.

> > La variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre $0,6$.
> > Donc $\mathbb{E}(X) = 0,6$
> > $\mathbb{V}(X) = 0,6(1-0,6) = 0,24$
> > $\sigma(X) = \sqrt{0,6(1-0,6)} = \sqrt{0,24} \approx 0,49$

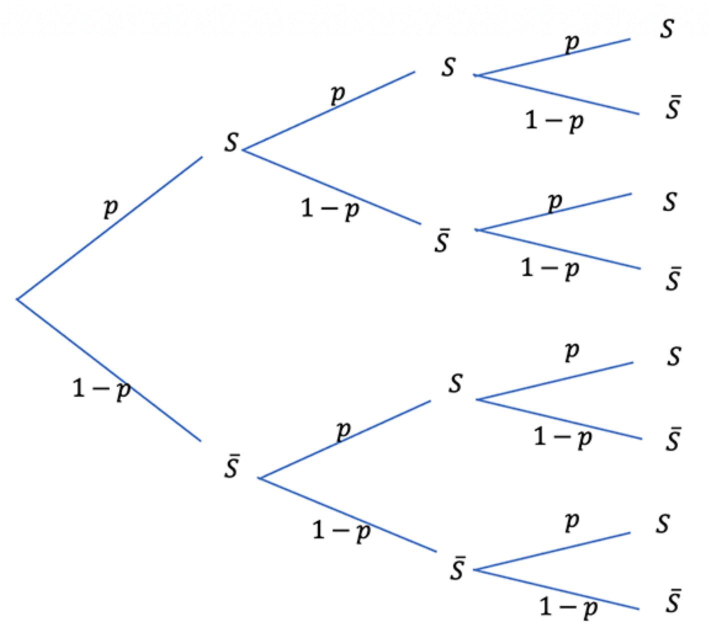
III - Loi binomiale

1. Schéma de Bernoulli

Définition

> Un schéma de Bernoulli est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

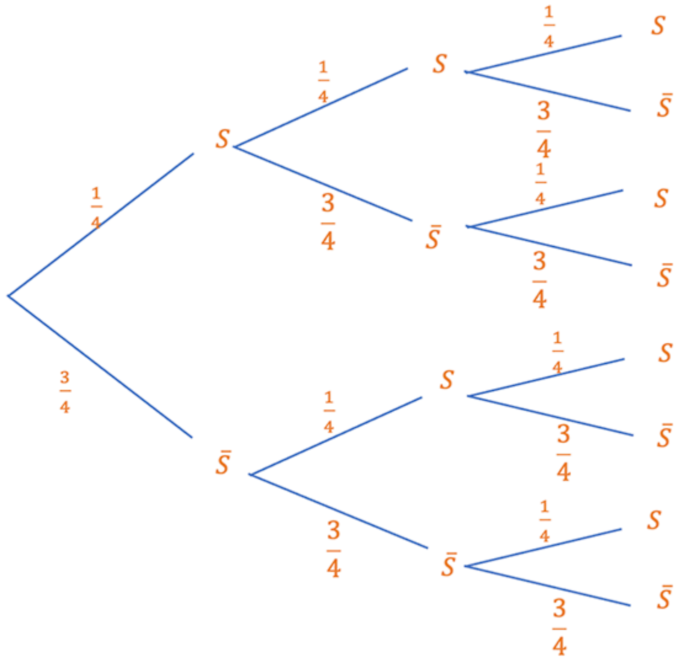
Remarque

> On représente souvent un schéma de Bernoulli par un arbre.
>
> 
>

Exemple

Une urne contient trois boules rouges et une boule verte.

1. On tire successivement sans remise 3 boules dans l'urne. Obtenir une boule verte est un succès.
   S'agit-il d'un schéma de Bernoulli ? justifier.
2. On tire successivement avec remise 3 boules dans l'urne. Obtenir une boule verte est un succès.
   S'agit-il d'un schéma de Bernoulli ? justifier.
3. Dans le cas du schéma de Bernoulli, donner le paramètre de l'épreuve de Bernoulli et établir l'arbre pondéré.

> > 1. Il ne s’agit pas d’un schéma de Bernoulli car il n’y a pas de remise donc les expériences ne sont pas indépendantes.
> > 2. Il s’agit d’un schéma de Bernoulli car il y a remise donc les expériences sont indépendantes et identiques.
> > 3. Le paramètre de l’épreuve de Bernoulli est donc $\frac{1}{4}$.
> >
> > 
> >

2. Coefficients binomiaux

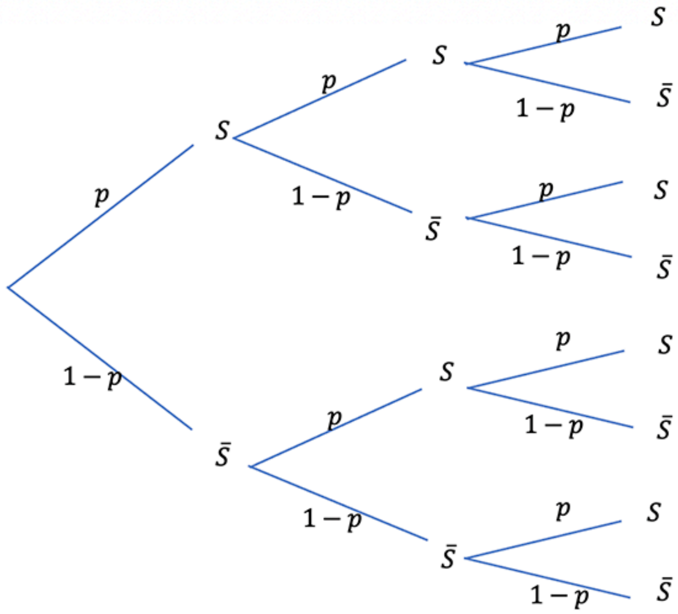
Définition

> On représente à l’aide d’un arbre un schéma de Bernouilli, répétition de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes.
>
> Pour tout entier k, $0 \leq k \leq n$, le nombre de chemins réalisant k succès est noté $\binom{n}{k}$, qui se lit « k parmi n ». Ces nombres sont appelés coefficients binomiaux.

Exemple

Une urne contient trois boules rouges et une boule verte. On tire successivement avec remise 3 boules dans l’urne. Obtenir une boule verte est un succès. Donner la valeur de $\binom{3}{0}$, $\binom{3}{1}$, $\binom{3}{2}$ et $\binom{3}{3}$.

> > En créant l'arbre correspondant:



> > On obtient immédiatement:
> > $\binom{3}{0} = 1$
> > $\binom{3}{1} = 3$
> > $\binom{3}{2} = 3$
> > $\binom{3}{3} = 1$

Propriété

> $\forall n \in \mathbb{N}^*$; on a:
> $\binom{n}{0} = 1$
> $\binom{n}{n} = 1$
> $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Propriété

> $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k < n$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Exemple

En partant de l'exemple précédent, calculer $\binom{4}{2}$.

> > $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$

Triangle de Pascal

> On peut calculer $\binom{n}{k}$ de proche en proche à l'aide du tableau ci-dessous. Pour cela,
>
> - On convient que $\binom{0}{0} = 1$
> - On place 1 sur la colonne « $k = 0$ » et la diagonale « $k = n$ ».
> - On obtient un autre nombre du tableau en additionnant le nombre juste au-dessus et celui situé à gauche sur la ligne précédente.
>
> | $k \rightarrow$ n $\downarrow$ | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** |
> |---|---|---|---|---|---|---|
> | 0 | 1 | | | | | |
> | 1 | 1 | 1 | | | | |
> | 2 | 1 | 2 | 1 | | | |
> | 3 | 1 | 3 | 3 | 1 | | |
> | 4 | 1 | 4 | 6 | 4 | 1 | |
> | 5 | 1 | 5 | 10 | 10 | 5 | 1 |

Exemple

Calculer $\binom{6}{2}$.

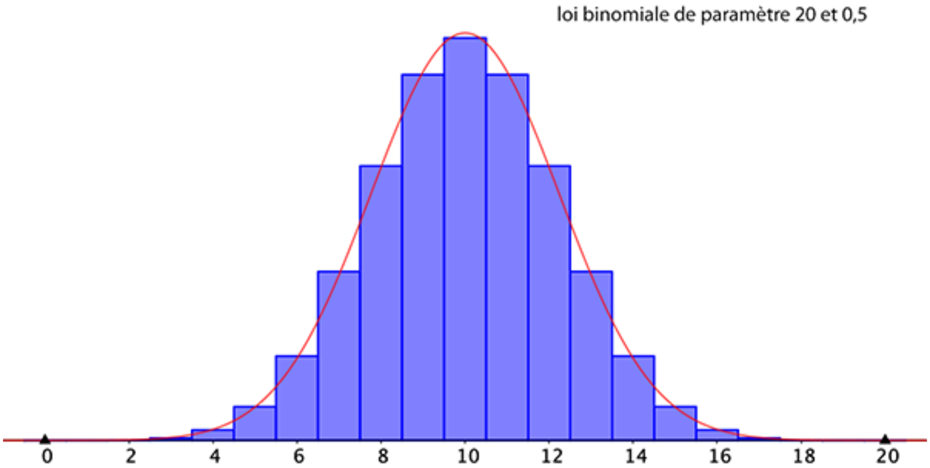
> > En faisant le triangle de Pascal, on peut dire que:
> > $\binom{6}{2} = 15$

3. Loi binomiale

Définition

> On considère un schéma de Bernouilli, répétition de n épreuves de Bernouilli identiques et indépendantes de même paramètre p. On note X la variable aléatoire qui associe à cette répétition de n épreuves le nombre de succès.
> La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètre n et p.
> On note $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(n; p)$.

Graphiquement



Exemple

On lance trois fois de suite une pièce truquée avec laquelle on obtient Pile deux fois plus souvent que Face. On note X la variable aléatoire égale au nombre de Pile obtenus.

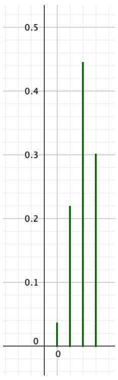
1. Etablir la loi de probabilité de X.
2. S'agit-il d'une loi binomiale ? Si oui, donner les paramètres de cette loi.
3. Faire un diagramme en batons représentant la loi de probabilité.

1. La probabilité d'obtenir Pile est $\frac{2}{3}$.
   L'ensemble des issues est:
   $\Omega = \{(P; P; P); (P; P; F); (P; F; P); (F; P; P); (P; F; F); (F; P; F); (F; F; P); (F; F; F)\}$
   Ci-dessous, la loi de probabilité de X:

k	0	1	2	3
$\mathbb{P}(X = k)$	$\frac{1}{27}$	$\frac{6}{27} = \frac{2}{9}$	$\frac{12}{27} = \frac{4}{9}$	$\frac{8}{27}$

2. Il y a bien répétition de 3 répétitions d'épreuves de Bernoulli (succès Pile, échec: Face) identiques et indépendantes.
   La variable aléatoire X compte le nombre de succès.
   Donc X suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$.
   $X \rightsquigarrow \mathscr{B}\left(3; \frac{2}{3}\right)$.

3. Voic le diagramme en bâtons



Propriété

> Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p.
> $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq k \leq n$, $\mathbb{P}(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$.

Exemple

Vérifier la formule avec l'exemple précédent.

> > $$\mathbb{P}(X=0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^0 \left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-0} = 1 \times 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$$
> > $$\mathbb{P}(X=1) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-1} = 3 \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{6}{27} = \frac{2}{9}$$
> > $$\mathbb{P}(X=2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-2} = 3 \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3} = \frac{12}{27} = \frac{4}{9}$$
> > $$\mathbb{P}(X=3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \left(\frac{2}{3}\right)^3 \left(1-\frac{2}{3}\right)^{3-3} = 1 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 1 = \frac{8}{27}$$

Propriété

> Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p avec $n \geq 1$ et $0 \leq p \leq 1$.
> On a:
> $\mathbb{E}(X) = np$
> $\mathbb{V}(X) = np(1-p)$
> $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$

Démonstration dans le cas où $n \leq 3$

> 1er cas: $n = 1$
> On est dans le cas d'une épreuve de Bernoulli. Donc X suit une loi de Bernoulli.
> On a bien:
> $\mathbb{E}(X) = p = 1 \times p$
> $\mathbb{V}(X) = p(1-p) = 1 \times p(1-p)$
> $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)} = \sqrt{1 \times p(1-p)}$
>
> 2ème cas: $n = 2$
> $\mathbb{P}(X=0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} p^0(1-p)^2 = (1-p)^2$
> $\mathbb{P}(X=1) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} p^1(1-p)^1 = 2p(1-p)$
> $\mathbb{P}(X=2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} p^2(1-p)^0 = p^2$
>
> On a alors:
> $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1-p)^2 + 1 \times 2p(1-p) + 2 \times p^2 = 2p - 2p^2 + 2p^2 = 2p$
> $\mathbb{V}(X) = (0-2p)^2 \times (1-p)^2 + (1-2p)^2 \times 2p(1-p) + (2-2p)^2 \times p^2$
> $\mathbb{V}(X) = 4p^2(1-2p+p^2) + (1-4p+4p^2) \times (2p-2p^2) + (4-8p+4p^2)p^2$
> $\mathbb{V}(X) = 4p^2 - 8p^3 + 4p^4 + 2p - 2p^2 - 8p^2 + 8p^3 + 8p^3 - 8p^4 + 4p^2 - 8p^3 + 4p^4$
> $\mathbb{V}(X) = -2p - 2p^2 = 2p(1-p)$
> $\sigma(X) = \sqrt{2p(1-p)}$

> 3ème cas: $n = 3$
> $\mathbb{E}(X) = 0 \times (1-p)^3 + 1 \times 3p(1-p)^2 + 2 \times 3p^2(1-p) + 3 \times p^3$
> $\mathbb{E}(X) = 3p(1-2p+p^2) + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3$
> $\mathbb{E}(X) = 3p - 6p^2 + 3p^3 + 6p^2 - 6p^3 + 3p^3$
> $\mathbb{E}(X) = 3p$
> $\mathbb{V}(X) = (0-3p)^2 \times (1-p)^3 + (1-3p)^2 \times 3p(1-p)^2 + (2-3p)^2 \times 3p^2(1-p) + (3-3p)^2 \times p^3$
> $\mathbb{V}(X) = 9p^2(1-3p+3p^2-p^3) + 3p(1-6p+9p^2)(1-2p+p^2) + (4-12p+9p^2)(3p^2-3p^3) + (9-18p+9p^2)p^3$
> $\mathbb{V}(X) = 9p^2 - 27p^3 + 27p^4 - 9p^5 + 3p(1-2p+p^2-6p+12p^2-6p^3+9p^2-18p^3+9p^4)$
> $+12p^2 - 12p^3 - 36p^3 + 36p^4 + 27p^4 - 27p^5 + 9p^3 - 18p^4 + 9p^5$
> $\mathbb{V}(X) = 21p^2 - 66p^3 + 72p^4 - 27p^5 + 3p(1-8p+22p^2-24p^3+9p^4)$
> $\mathbb{V}(X) = 21p^2 - 66p^3 + 72p^4 - 27p^5 + 3p - 24p^2 + 66p^3 - 72p^4 + 27p^5$
> $\mathbb{V}(X) = 3p - 3p^2 = 3p(1-p)$
> $\sigma(X) = \sqrt{3p(1-p)}$

Exemple

Toujours dans l'exemple précédent, déterminer $\mathbb{E}(X)$, $\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(X)$.

> > La variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres 3 et $\frac{2}{3}$.
> > Donc $\mathbb{E}(X) = 3 \times \frac{2}{3} = 2$
> > $\mathbb{V}(X) = 3 \times \frac{2}{3} \times \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$
> > $\sigma(X) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

IV - Loi géométrique

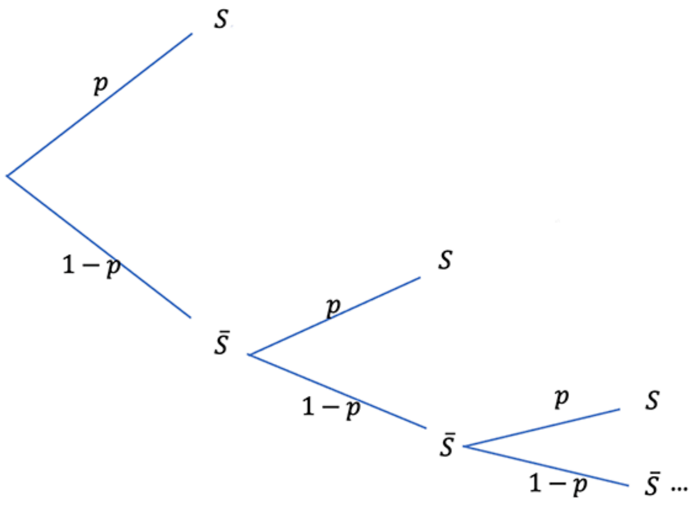
1. Généralités

Définition

> On considère une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes dont la probabilité est $p \in]0;1[$.
> La variable aléatoire X compte le nombre d'épreuves nécessaires pour avoir le premier succès.
> La loi de probabilité de la variable aléatoire X est appelée loi géométrique de paramètre p.

Remarque

> On peut représenter cette loi par l'arbre ci-dessous:



Propriété

> Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
> $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$

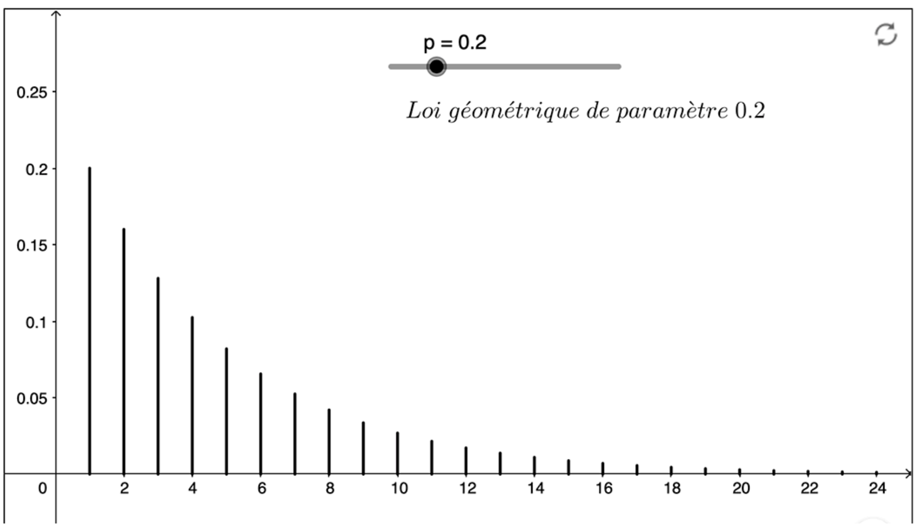
Exemple

On lance une pièce truquée dont la probabilité d'obtenir Pile est $0,4$.
La variable aléatoire X compte le nombre de lancers nécessaire pour obtenir un succès.

1. Quelle loi suit la variable aléatoire X ?
2. Calculer $\mathbb{P}(X=3)$.

> > 1. On répète des épreuves de Bernoulli (succès: Pile, échec: Face) identiques et indépendantes. La probabilité d'obtenir un succès est $0,4$.
> >   La variable aléatoire X compte le nombre de lancers nécessaire pour obtenir un succès donc X suit une loi géométrique de paramètre $0,4$.
> > 2. $\mathbb{P}(X=3) = 0,4(1-0,4)^{3-1} = 0,4 \times 0,6^2 = 0,4 \times 0,36 = 0,144$

Graphiquement



Propriété

> Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
> $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$

Exemple

Dans l'exemple précédent, déterminer l'espérance de la variable aléatoire X.

> > La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $0,4$.
> > Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{0,4} = 2,5$

2. loi sans mémoire

Propriété

> Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
> $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$

Exemple

Dans l'exemple précédent, déterminer $\mathbb{P}(X > 5)$.

> > La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $0,4$.
> > Donc $\mathbb{P}(X > 5) = (1-0,4)^5 = 0,07776$.

Propriété

> Soit X une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p \in]0;1[$.
> $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N}^*, \mathbb{P}_{(X>n)}(X > n+k) = \mathbb{P}(X > k)$

Remarque

> On dit qu'une loi géométrique est une loi sans mémoire. Cela veut dire qu'attendre plus de k épreuves pour obtenir un succès a la même probabilité que l'on parte de la 1ère épreuve ou de la 50ème épreuve sachant que l'on n'a pas obtenu de succès sur les 50 premières épreuves.

Démonstration

> Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}^*$.
> $\mathbb{P}_{(X>n)}(X > n+k) = \frac{\mathbb{P}((X>n)\cap(X>n+k))}{\mathbb{P}(X>n)} = \frac{\mathbb{P}(X>n+k)}{\mathbb{P}(X>n)} = \frac{(1-p)^{n+k}}{(1-p)^n} = (1-p)^k = \mathbb{P}(X > k)$

Exemple

Dans l'exemple précédent, déterminer $\mathbb{P}_{(X>5)}(X > 8)$.

> > La variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre $0,4$, qui est une loi sans mémoire.
> > Donc $\mathbb{P}_{(X>5)}(X > 8) = \mathbb{P}(X > 3) = (1-0,4)^3 = 0,064$

V - Exemples de problèmes

1. Série des moyennes pour N échantillons de taille n

Lors d'une partie de jeu de rôle, des amis utilisent un dé tétraédrique dont les sommets sont numérotés de 1 à 4.
Quand on lance un tel dé, le numéro obtenu est alors celui qui entoure le sommet supérieur.
Nous allons simuler des échantillons de lancers de ce dé et d'étudier la série des moyennes de ces échantillons.

1. ***Étudier une loi de probabilité***
   On lance un tel dé équilibré. X est la variable aléatoire qui donne le numéro obtenu.
   a. Quelle est la loi suivie par X ?
   b. Calculer l'espérance μ et l'écart type σ de X.

2. ***Simuler des échantillons***
   Alvin lance cinq fois un dé équilibré à quatre faces, ce qui constitue un échantillon de taille 5 de la variable aléatoire X.
   Il calcule alors la moyenne des numéros obtenus et est surpris de voir qu'elle n'est pas égale à μ.
   Pour comprendre ce phénomène, Alvin décide de simuler des échantillons de lancers de ce dé et de calculer la moyenne de chaque échantillon. Pour cela, il écrit en langage Python les fonctions ci-dessous.

Python

```python
1  from random import randint
2
3  def echantillon(n):
4      L=[]
5      for i in range(n):
6          L.append(randint(1,4))
7      return L
8
9  def moyenne(L):
10     m=sum(L)/len(L)
11     return m
```

   a. Saisir ces fonctions et expliquer les lignes 7 et 11.
   b. Quelle instruction faut -il exécuter pour obtenir la moyenne d'un échantillon de cinq lancers?
   La saisir et noter le résultat obtenu. Est-il égal à μ?
   c. Obtenir de même la moyenne pour un échantillon de taille 100, puis un chantillon de t aille 1000.

3. ***Étudier une série de moyennes d'échantillons***
   Pour poursuivre son étude, Alvin ajoute les deux fonctions en langage Python ci-dessous.

Python

```python
def serie_moyenne(N,n):
    M=[]
    for i in range(N):
        M.append(moyenne(echantillon(n)))
    return M

def ecart_type(L):
    n=len(L)
    m=moyenne(L)
    for i in range(n):
        L[i]=(L[i]-m)**2
    v=moyenne(L)
    s=sqrt(v)
    return s
```

   a. Expliquer le rôle de la fonction `serie_moyennes` et ce que représentent ses paramètres N et n.

b. Exécuter `ecart_type(serie_moyennes(50, 100))`.
Que représente le résultat affiché?
c. Donner l'arrondi au millième de $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, où n est la taille des échantillons simulés.
d. Exécuter à nouveau plusieurs fois la commande de la question b. et comparer les résultats affichés avec la valeur calculée à la question c.
Que constate-t-on?
e. Ajouter deux nouvelles fonctions Python: l'une qui calcule, pour un échantillon simulé, l'écart entre la moyenne observée et μ, l'autre qui pour une série de N échantillons de taille n, calcule la proportion des cas où l'écart entre la moyenne observée et μ est inférieur ou égal à $k\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, pour $k = 2$ ou $k = 3$.

2. Sondage et échantillonnage aléatoire simple

Lors d'une élection, un candidat accède au second tour avec $16,86\%$ des suffrages exprimés.
Pourtant, une semaine avant le vote, les sondages estimaient à 13% le score de ce candidat.
Nous allons analyser l'interprétation des sondages.

1. On suppose qu'un sondage a été réalisé auprès de 1000 personnes une semaine avant les élections et que sur ces 1000 personnes interrogées, 130 avaient déclaré vouloir voter pour ce candidat.
On assimile le choix de cet échantillon à un tirage au hasard avec remise.
On fait l'hypothèse que la proportion des électeurs de l'échantillon qui voteront pour ce candidat est $p = 0,1686$.
X est la variable aléatoire qui donne le nombre d'électeurs de l'échantillon qui voteront pour ce candidat.
a. Justifier que X suit une loi binomiale. Quels en sont les paramètres?
b. Réaliser la feuille de calcul ci-dessous qui affiche les probabilités $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour les nombres entiers naturels k de O à 1 000.

	A	B
1	k	P(X≤k)
2	0	6,45684E-81
3	1	1,31584E-78
4	2	1,33949E-76
5	3	9,08157E-75
6	4	4,61344E-73
7	5	1,87309E-71
8	6	6,33124E-70
9	7	1,83254E-68

Dans la cellule B2, saisir la formule `=LOI.BINOMIALE(A2;1000;0,1686 ;1)`.
c. Déterminer , avec la loi de X:

- le plus petit entier naturel a tel que $\mathbb{P}(X \leq a) \geq 0,025$.
- le plus petit entier naturel b tel que $\mathbb{P}(X \leq b) \geq 0,975$.

Interpréter ces valeurs.
d. Que peut-on penser du nombre de personnes sondées dans l'échantillon qui ont déclaré avoir l'intention de voter pour ce candidat? Justifier la réponse.

2. L'institut de sondage fait l'hypothèse que 10% des personnes déclarant vouloir voter pour ce candidat ne disent pas la vérité et voteront en réalité pour un autre candidat, tandis que 5% des personnes déclarant vouloir voter pour un autre candidat ne disent pas la vérité et voteront en réalité pour ce candidat.
   On choisit au hasard une personne ayant répondu au sondage et on note:

- S l'événement: « La personne interrogée affirme vouloir voter pour ce candidat ».
- V l'événement: « La personne interrogée dit la vérité».
  a. Représenter la situation par un arbre pondéré.
  b. Calculer la probabilité $\mathbb{P}(V)$.
  c. Sachant que la personne interrogée dit la vérité, calculer la probabilité qu'elle affirme vouloir voter pour ce candidat. Arrondir au millième.
  d. Démontrer que la probabilité que la personne choisie vote effectivement pour ce candidat est de $0,1605$.
  e. L'institut de sondage annonce alors que $16,05\%$ des personnes interrogées voteront pour ce candidat. Cette estimation est-elle cohérente avec le résultat des élections?

3. Pêcheurs de perle

Pour satisfaire une demande particulière et urgente, un joaillier demande à deux pêcheurs de perles de lui procurer une perle rare. Le pêcheur A (resp. B) a une probabilité p_A (resp. P_B) d'en trouver une dans une journée de pêche. Le joaillier promet une prime au premier qui la trouvera dans un délai de sept jours.
On suppose que les deux pêcheurs sont dans deux zones éloignées de sorte que les pêches puissent être considérées comme indépendantes l'une de l'autre. De plus, on suppose que pour un pêcheur donné, la découverte d'une perle est un phénomène indépendant d'un jour à l'autre.
On note X le temps d'attente en jours avant que le pêcheur A ne trouve une perle.
On note Y le temps d'attente en jours avant que le pêcheur B ne trouve une perle.

1. Déterminer la loi de X.
2. Que vaut l'espérance de X?
3. On introduit la variable $Z = min(X; Y)$, où $min(a; b)$ désigne la plus petite valeur entre a et b. Par exemple, $min(5; 2) = 2$.
   Dans la suite, k est un entier supérieur à 1.
   a. Expliquer ce que représente la variable Z.
   b. Montrer que :
   $\mathbb{P}(X < k) = 1 - q_A^{k-1}$ où $q_A = 1 - p_A\cdot$
   Utiliser la somme des termes d'une suite géométrique.
   c. En déduire $\mathbb{P}(X \geq k)$ en fonction de p_A.
   d. De même, exprimer $\mathbb{P}(Y \geq k)$ en foncti on de p_B.
   e. Justifier que :
   $\mathbb{P}(Z \geq k) = \mathbb{P}(\{X \geq k\} \cap \{Y \geq k\})$.
   f. En déduire que $\mathbb{P}(Z \geq k) = (q_A q_B)^{k-1}$ où $q_A = 1 - p_A$ et $q_B = 1 - p_B$.
   g. Vérifier que $P(Z = k) = P(Z \geq k) - P(Z \geq k + 1)$.
   h. Démontrer que Z suit une loi géométrique dont on déterminera le paramètre.
4. a. Montrer que $\mathbb{P}(Z \leq 7) = 1 - (q_A q_a)^7\cdot$
   b. On suppose que $q_A = 0,001$ et $q_B = 0,0015$.
   Que dire de la probabilité que les pêcheurs satisfassent a la demande du joaillier?