chapitre 08 - temps d'attente

I - Généralités sur les lois à densités

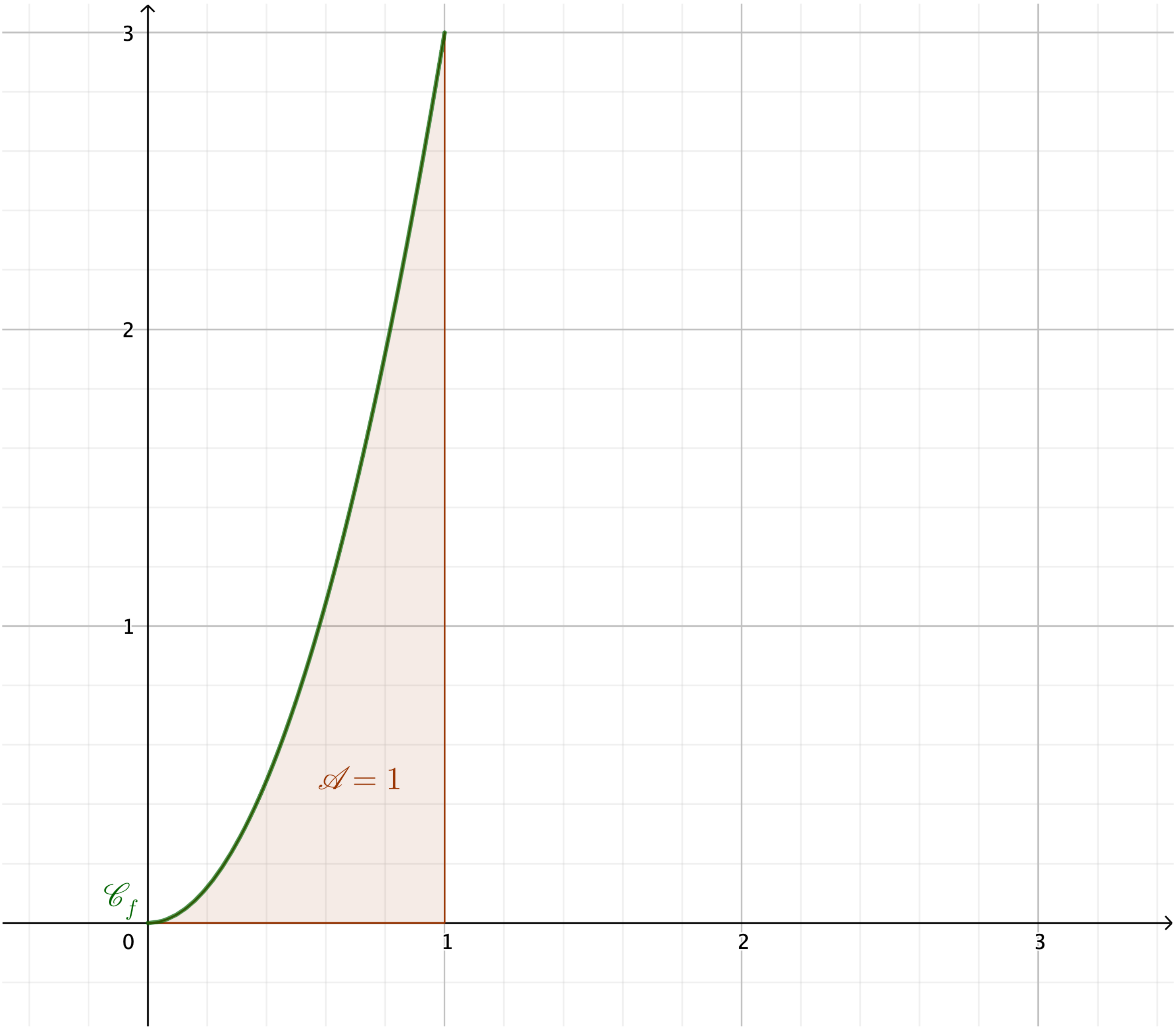
1. Notion de loi à densité

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

On dit que f est une densité de probabilité (ou une fonction de densité) sur I si et seulement si f est continue et positive sur I et si l'aire (en unité d'aire) du domaine compris entre l'axe des abscisses et la courbe de f sur l'intervalle I est égale à 1.

f est une densité de probabilité $\Leftrightarrow \int_I f(t)\mathrm{d}t = 1$.



Exemple

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $f(x) = 3x^2$.

Démontrer que f est une densité de probabilité.

> $0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 3x^2 \leq 3$
> Donc $\forall x \in [0;1], f(x) \geq 0$.
> De plus f est une fonction continue sur $[0;1]$ car la fonction carrée l'est.
> Enfin, $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 3t^2\mathrm{d}t = \left[t^3\right]_0^1 = 1^3 - 0^3 = 1 - 0 = 1$
> Ainsi f est bien une fonction de densité.

2. Variable aléatoire à densité

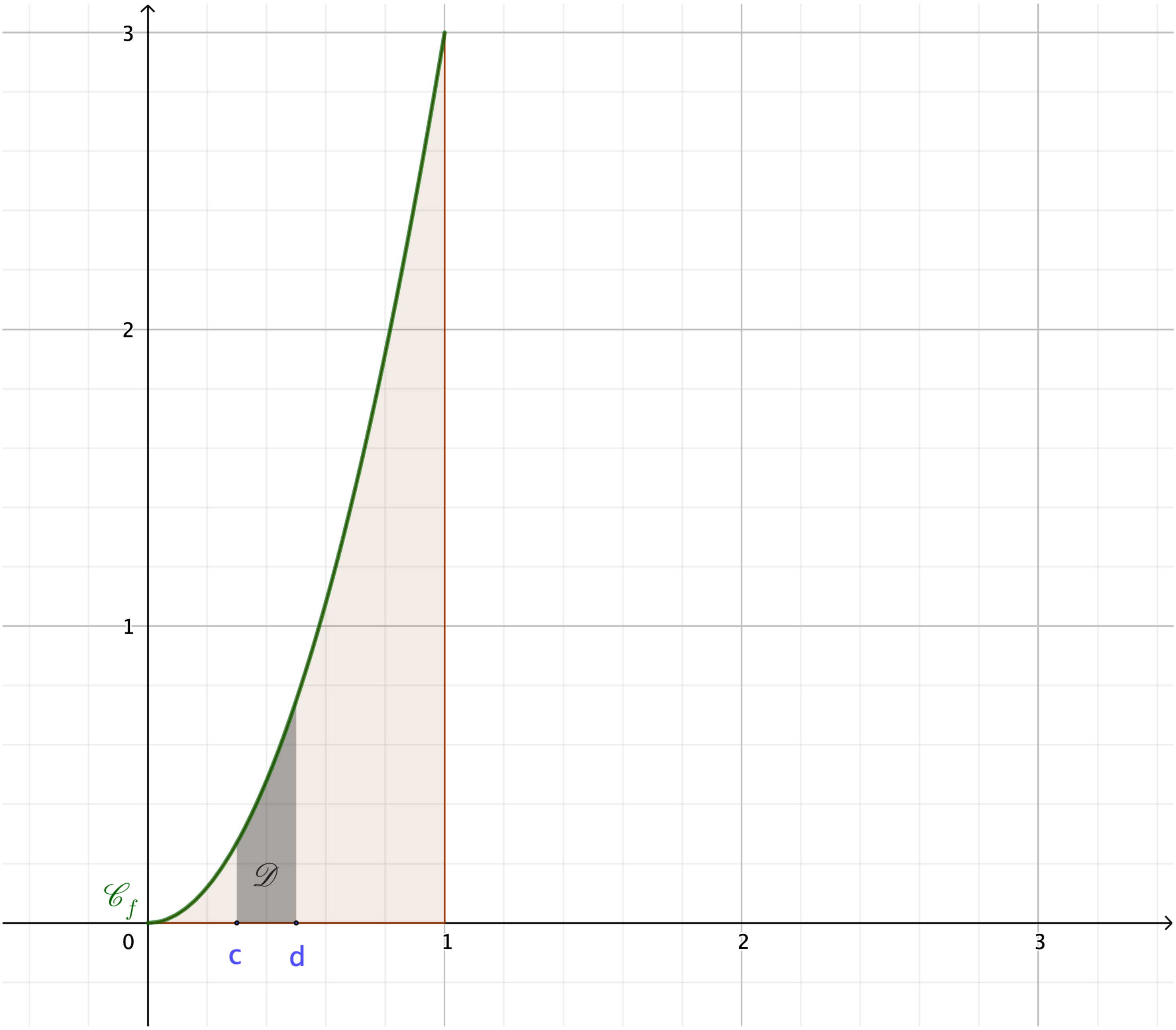
Définition

Soit f une densité de probabilité sur un intervalle I.

Dire que la variable aléatoire X suit une loi de densité f sur I signifie que, pour tout intervalle $[c;d]$ inclus dans I, la probabilité $\mathbb{P}(c \leq X \leq d)$ est égale à l'aire du domaine $\mathscr{D}$ comprise entre l'axe des abscisses, la courbe de f et les droites d'équation $x = c$ et $x = d$.

On a donc $\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \int_c^d f(t)\mathrm{d}t$.

On dit que X est une variable aléatoire à densité.



Remarque

- Soit X une variable aléatoire à densité qui suit une loi de densité f sur un intervalle I.

$\forall c \in I, \mathbb{P}(X = c) = 0$.
En effet, $\mathbb{P}(X = c) = \mathbb{P}(c \leq X \leq c) = \int_c^c f(t)\mathrm{d}t = 0$

- Par conséquent, les inégalités strictes peuvent être remplacées par des inégalités larges: $\forall c \in I, \forall d \in I, \mathbb{P}(c < X < d) = \mathbb{P}(c \leq X \leq d)$

Exemple

La variable aléatoire X suit la loi de densité f définie dans l'exemple précédent.

1. Déterminer $\mathbb{P}(0,5 \leq X \leq 0,7)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(X \leq 0,3)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(X \geq 0,6)$.

> 1. $\mathbb{P}(0,5 \leq X \leq 0,7) = \int_{0,5}^{0,7} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0,5}^{0,7} 3t^2\mathrm{d}t = \left[t^3\right]_{0,5}^{0,7} = 0,7^3 - 0,5^3 = 0,343 - 0,125 = 0,218$
> 2. $\mathbb{P}(X \leq 0,3) = \mathbb{P}(0 \leq X \leq 0,3) = \int_0^{0,3} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^{0,3} 3t^2\mathrm{d}t = \left[x^3\right]_0^{0,3} = 0,3^3 - 0^3 = 0,027 - 0 = 0,027$
> 3. 1ère façon
> $\mathbb{P}(X \geq 0,6) = \mathbb{P}(0,6 \leq X \leq 1) = \int_{0,6}^{1} f(t)\mathrm{d}t = \int_{0,6}^{1} 3t^2\mathrm{d}t = \left[t^3\right]_{0,6}^{1} = 1^3 - 0,6^3 = 1 - 0,216 = 0,784$
> 2ème façon
> $\mathbb{P}(X \geq 0,6) = 1 - \mathbb{P}(X < 0,6) = 1 - \mathbb{P}(X \leq 0,6) = 1 - \int_0^{0,6} f(t)\mathrm{d}t = 1 - \int_0^{0,6} 3t^2\mathrm{d}t = 1 - \left[t^3\right]_0^{0,6} = 1 - 0,6^3 = 1 - 0,216 = 0,784$

3. Fonction de répartition

Définition
Soit X une fonction aléatoire qui suit une loi de dénsité f sur un intervalle I.
On appelle fonction de répartition de la variable X, la fonction F définie sur l'intervalle I par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Remarque
En supposant que $I = [a;b]$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$, on a:
$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$.
Si $I = -\infty; b]$ alors $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \lim\limits_{a \to -\infty} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$

Exemple

La variable aléatoire X suit la loi de densité f définie dans l'exemple précédent.
Déterminer la fonction de répartition de X.

> $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x 3t^2\mathrm{d}t$
> $= \left[t^3\right]_0^x = x^3 - 0^3 = x^3$
> Donc la fonction de répartition de la variable aléatoire X est la fonction F définie sur l'intervalle $[0;1]$ par $F(x) = x^3$.

Remarque
Soit X une fonction aléatoire qui suit une loi de dénsité f sur un intervalle I. Soit F la fonction de répartition de X.
On a alors:
$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$

4. Espérance et variance d'une loi à densité

Définition
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de densité f sur un intervalle I.
L'espérance de X est $E(X) = \int_I tf(t)\mathrm{d}t$ et la variance de X est $V(X) = \int_I (t - E(X))^2 f(t)\mathrm{d}t$.

Propriété
La varaince peut aussi être calculer grâce à la formule de Koenig-Huygens:
$V(X) = \int_I t^2 f(t)\mathrm{d}t - (E(X))^2$

Exemple

La variable aléatoire X suit la loi de densité f définie dans l'exemple précédent.
Déterminer l'espérance et la variance de X.

> Calcul de l'espérance:

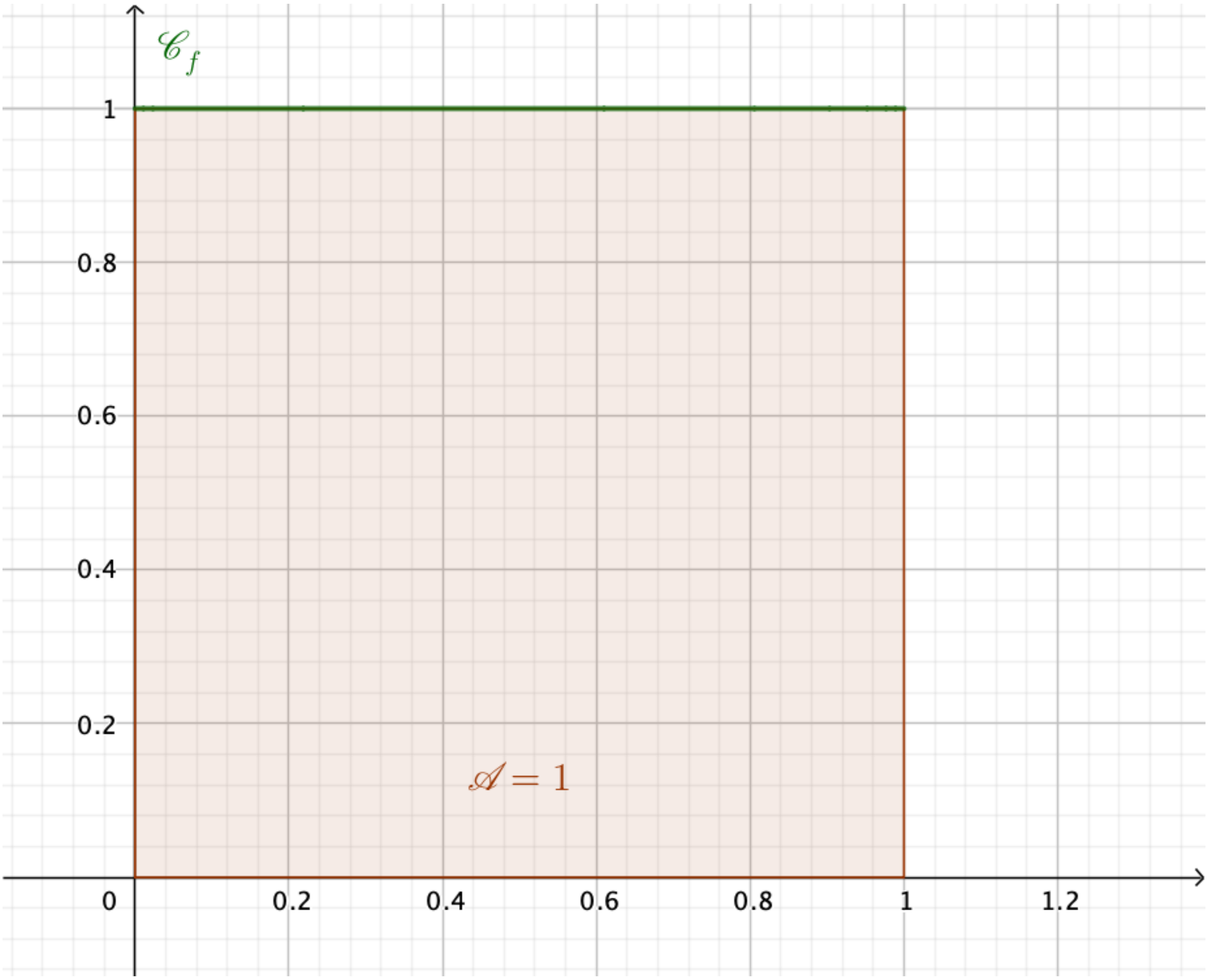
> $E(X) = \int_I tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 t \times 3t^2\mathrm{d}t = \int_0^1 3t^3\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{4}t^4\right]_0^1 = \frac{3}{4} \times 1^4 - \frac{3}{4} \times 0^4 = \frac{3}{4}$
> Calcul de la variance:
> 1ère façon
> $V(X) = \int_I (t - E(X))^2 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t - \frac{3}{4}\right)^2 \times 3t^2\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{16}\right) \times 3t^2\mathrm{d}t$
> $= \int_0^1 3t^4 - \frac{9}{2}t^3 + \frac{27}{16}t^2\mathrm{d}t = \left[\frac{3}{5}t^5 - \frac{9}{8}t^4 + \frac{9}{16}t^3\right]_0^1 = \left(\frac{3}{5} \times 1^5 - \frac{9}{8} \times 1^4 + \frac{9}{16} \times 1^3\right) - \left(\frac{3}{5} \times 0^5 - \frac{9}{8} \times 0^4 + \frac{9}{16} \times 0^3\right)$
> $= \frac{3}{5} - \frac{9}{8} + \frac{9}{16} = \frac{48}{80} - \frac{90}{80} + \frac{45}{80} = \frac{3}{80}$
> 2ème façon
> $V(X) = \int_I t^2 f(x)\mathrm{d}t - (E(X))^2 = \int_0^1 t^2 \times 3t^2\mathrm{d}t - \left(\frac{3}{4}\right)^2$
> $= \int_0^1 3t^4\mathrm{d}t - \frac{9}{16} = \left[\frac{3}{5}t^5\right]_0^1 - \frac{9}{16}$
> $= \frac{3}{5} \times 1^5 - \frac{3}{5} \times 0^5 - \frac{9}{16} = \frac{3}{5} - \frac{9}{16} = \frac{48}{80} - \frac{45}{80} = \frac{3}{80}$

II - Loi uniforme sur un intervalle

1. Loi uniforme sur $[0; 1]$

Définition

On appelle loi uniforme sur $I = [0; 1]$ la loi de densité de probabilité f où f est la fonction constante égale à 1 pour tout x de I.
Cette loi est notée $U([0; 1])$.



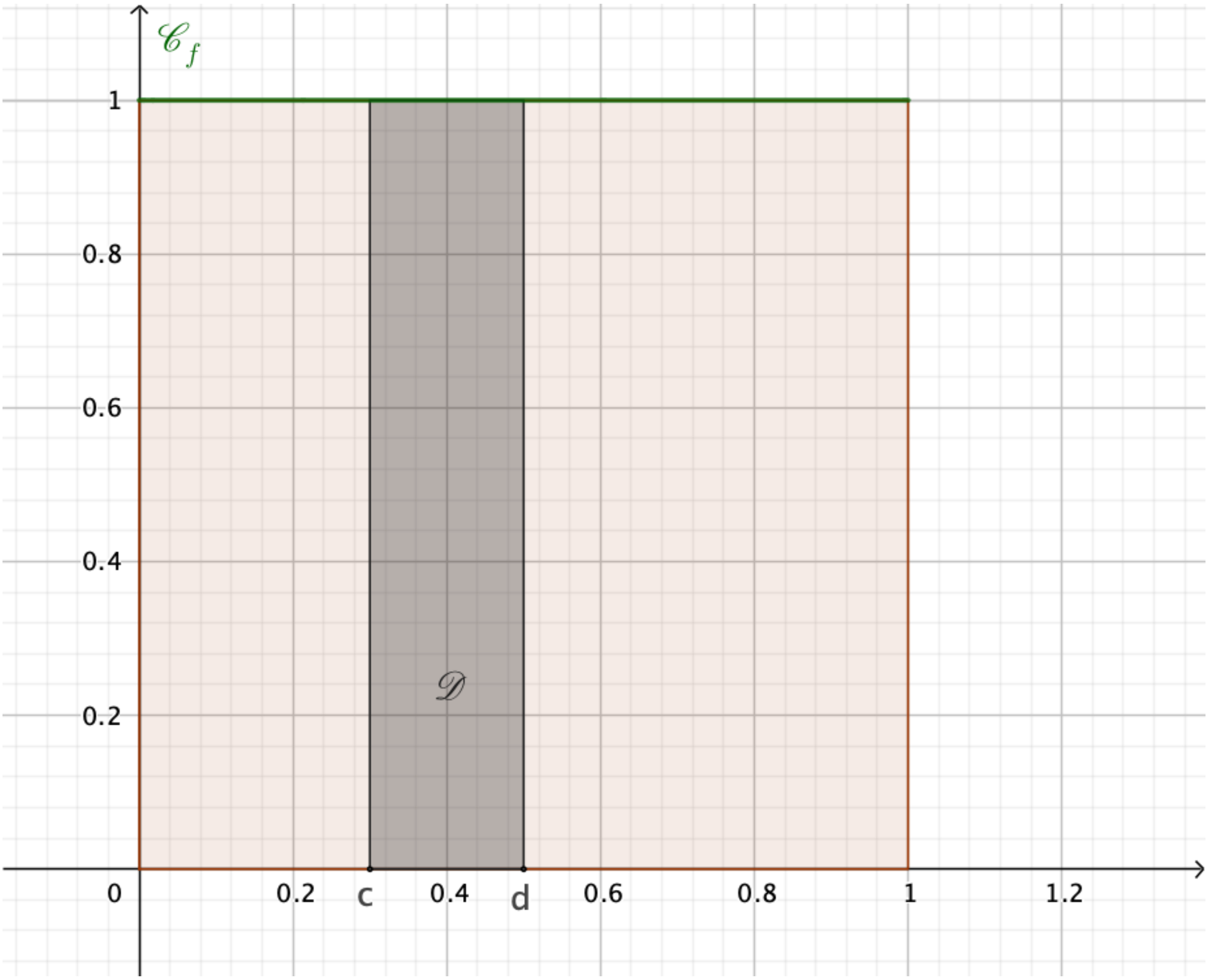
démonstration

Soit f la fonction constante sur $[0; 1]$ égale à 1 pour tout x de cet intervalle. Cette fonction est donc continue.

$\int_0^1 1\mathrm{d}t = [t]_0^1 = 1 - 0 = 1$ Donc f est une fonction de densité.

Propriété
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité uniforme sur $[0; 1]$.
Soient c et d deux nombres réels de $[0; 1]$ tels que $c < d$.
On a alors:
$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = d - c$

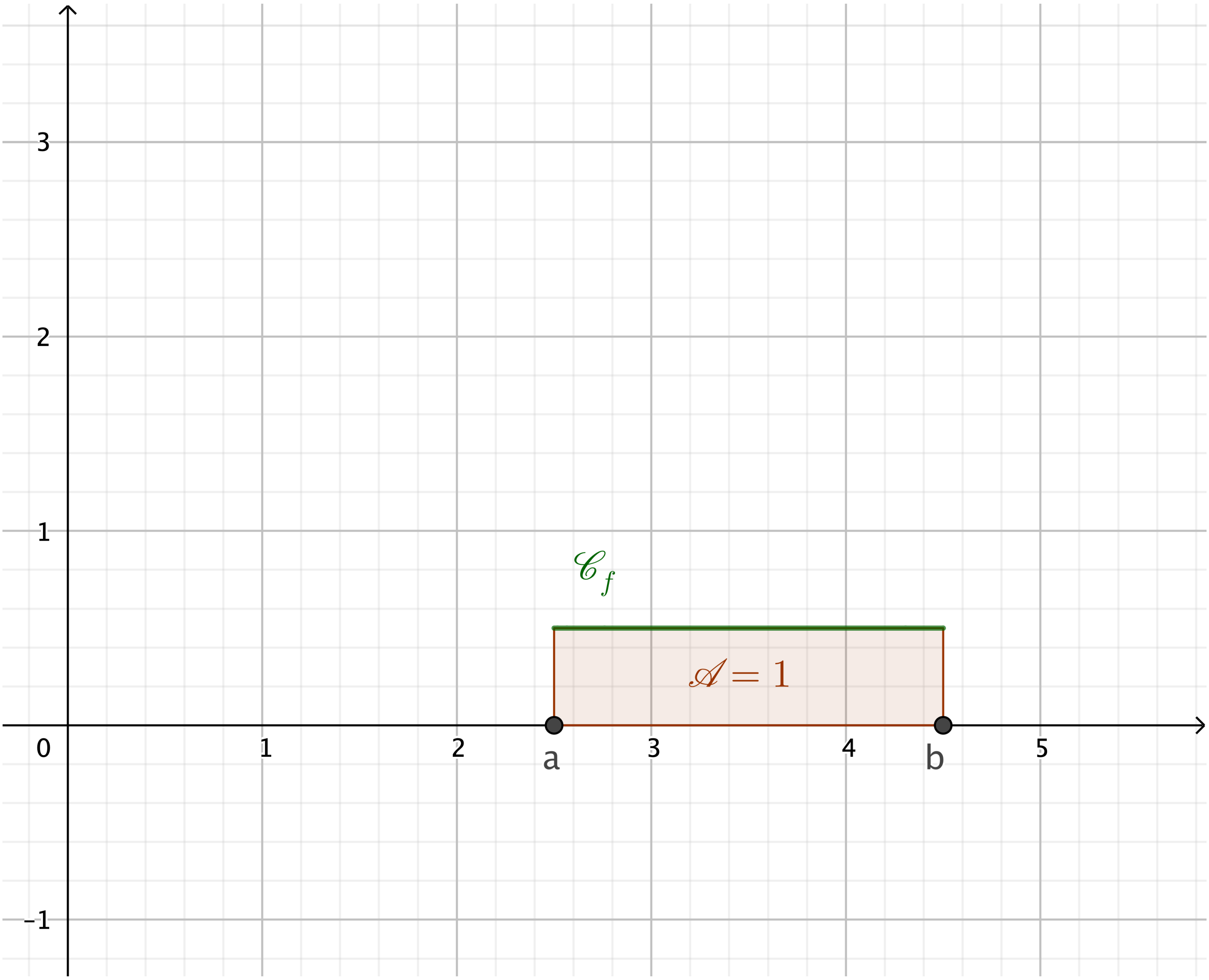
Démonstration



Il s'agit juste de calculer l'aire du rectangle noir:
$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = (d - c) \times 1 = d - c$

2. Loi uniforme sur $[a; b]$

Définition
Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
On appelle loi uniforme sur $I = [a; b]$ la loi de densité de probabilité f où f est la fonction constante égale à $\frac{1}{b-a}$ pour tout x de I.
Cette loi est notée $U([a; b])$.



démonstration

Soit f la fonction constante sur $[a;b]$ égale à $\frac{1}{b-a}$ pour tout x de cet intervalle. Cette fonction est donc continue.

$\int_a^b \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = [\frac{1}{b-a}t]_a^b = \frac{1}{b-a} \times b - \frac{1}{b-a} \times a = \frac{1}{b-a} \times (b-a) = \frac{b-a}{b-a} = 1$

Donc f est une fonction de densité.

Propriété

Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.

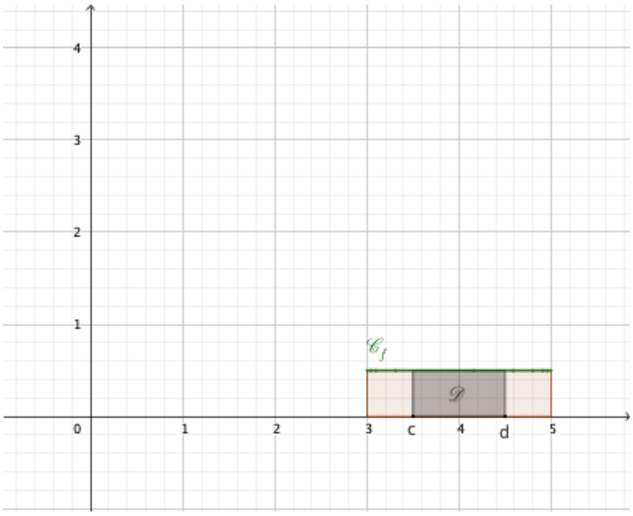
Soit X une variable aléatoire qui suit une loi de probabilité uniforme sur $[a;b]$.

Soient c et d deux nombres réels de $[a;b]$ tels que $c < d$.

On a alors:

$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}$

Démonstration



Il s'agit juste de calculer l'aire du rectangle noir:
$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = (d-c) \times \frac{1}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$

Propriété Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
Soit X une varaible aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
La fonction de répartition de X est la fonction définie sur $[a;b]$ par:
$F(x) = \frac{x-a}{b-a}$

Propriété Soient a et b deux nombres réels tels que $a < b$.
Soit X une varaible aléatoire qui suit une loi uniforme sur l'intervalle $[a;b]$.
L'espérance de X est $E(X) = \frac{b+a}{2}$ et la variance de X est $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

Démonstration
$E(X) = \int_a^b tf(t)\mathrm{d}t = \int_a^b t \times \frac{1}{b-a}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{b-a}\frac{t^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{2(b-a)} \times b^2 - \frac{1}{2(b-a)} \times a^2$
$= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$

$V(X) = \int_a^b t^2 f(t)\mathrm{d}t - (E(X))^2 = \int_a^b \frac{1}{b-a}t^2\mathrm{d}t - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$
$= \left[\frac{1}{b-a} \times \frac{t^3}{3}\right]_a^b - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{1}{3(b-a)}b^3 - \frac{1}{3(b-a)}a^3 - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4}$

On remarque que $(b-a)(b^2+ab+a^2) = b^3+ab^2+a^2b-ab^2-a^2b-a^3 = b^3-a^3$
Donc $\frac{b^3-a^3}{b-a} = b^2+ab+a^2$
Ainsi $V(X) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{4(b^2+ab+a^2)}{12} - \frac{3(b^2+2ab+a^2)}{12} = \frac{4b^2+4ab+4a^2-3b^2-6ab-3a^2}{12}$
$V(X) = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$

Remarque
Dans le cas où $a = 0$ et $b = 1$, on a une loi uniforme sur $[0;1]$.
De plus, $E(X) = \frac{1}{2}$, $V(X) = \frac{1}{12}$ et la fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $[0;1]$ par $F(x) = x$.
On a donc $\mathbb{P}(X \leq x) = x$.

Exemple

Soit la variable aléatoire X qui suit une loi uniforme sur $[3;9]$.

1. Déterminer la fonction de répartition de X.
2. Calculer $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 5)$.
3. Calculer l'expérance et la variance de X.

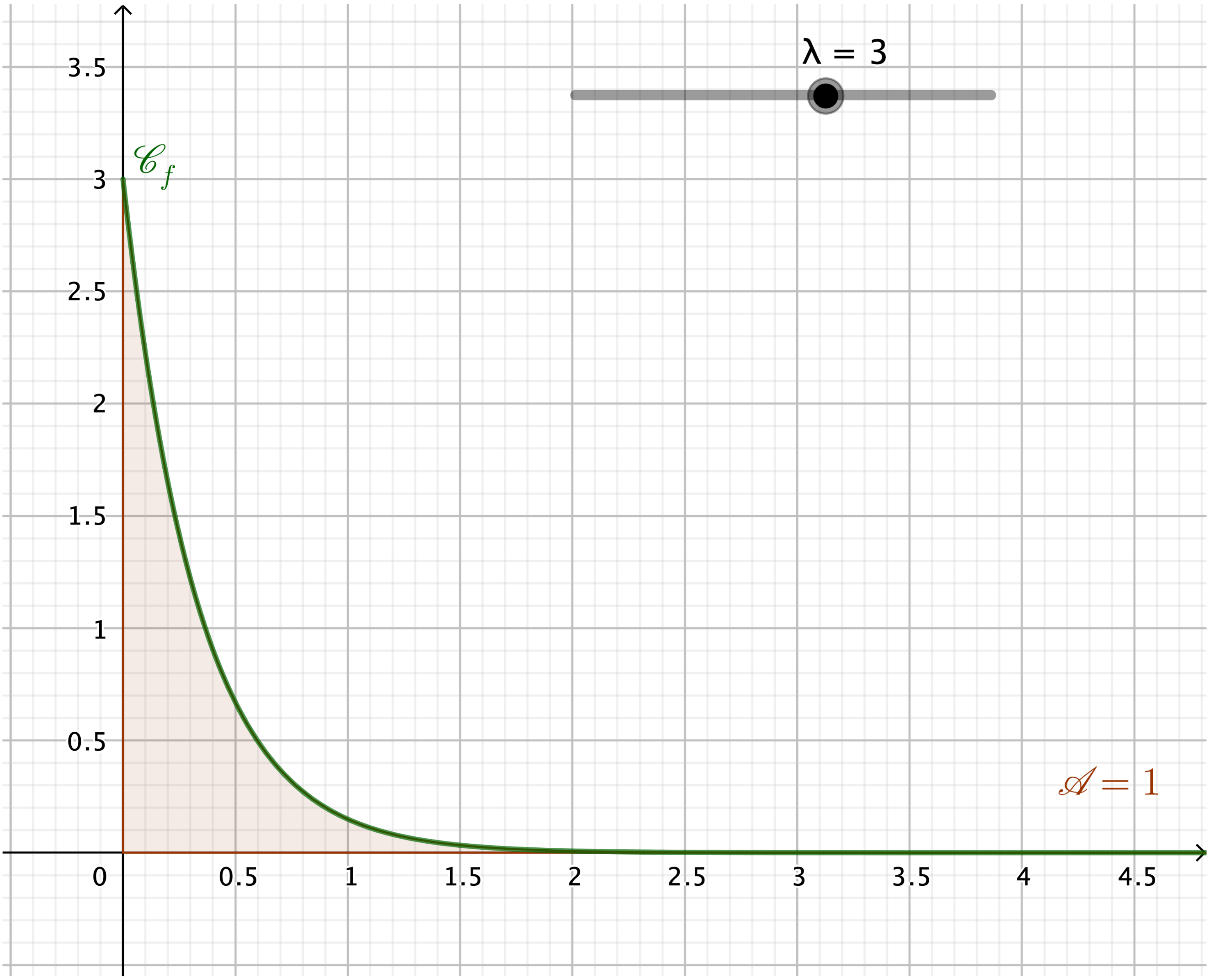
> 1. La fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $[3;5]$ par $F(x) = \frac{x-3}{9-3} = \frac{x-3}{6}$.
> 2. $\mathbb{P}(4 \leq X \leq 5) = F(5) - F(4) = \frac{5-3}{6} - \frac{4-3}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$
> 3. $E(X) = \frac{9+3}{2} = 6$
> $V(X) = \frac{(9-3)^2}{12} = \frac{36}{12} = 3$

III - Loi exponentielle

Propriété

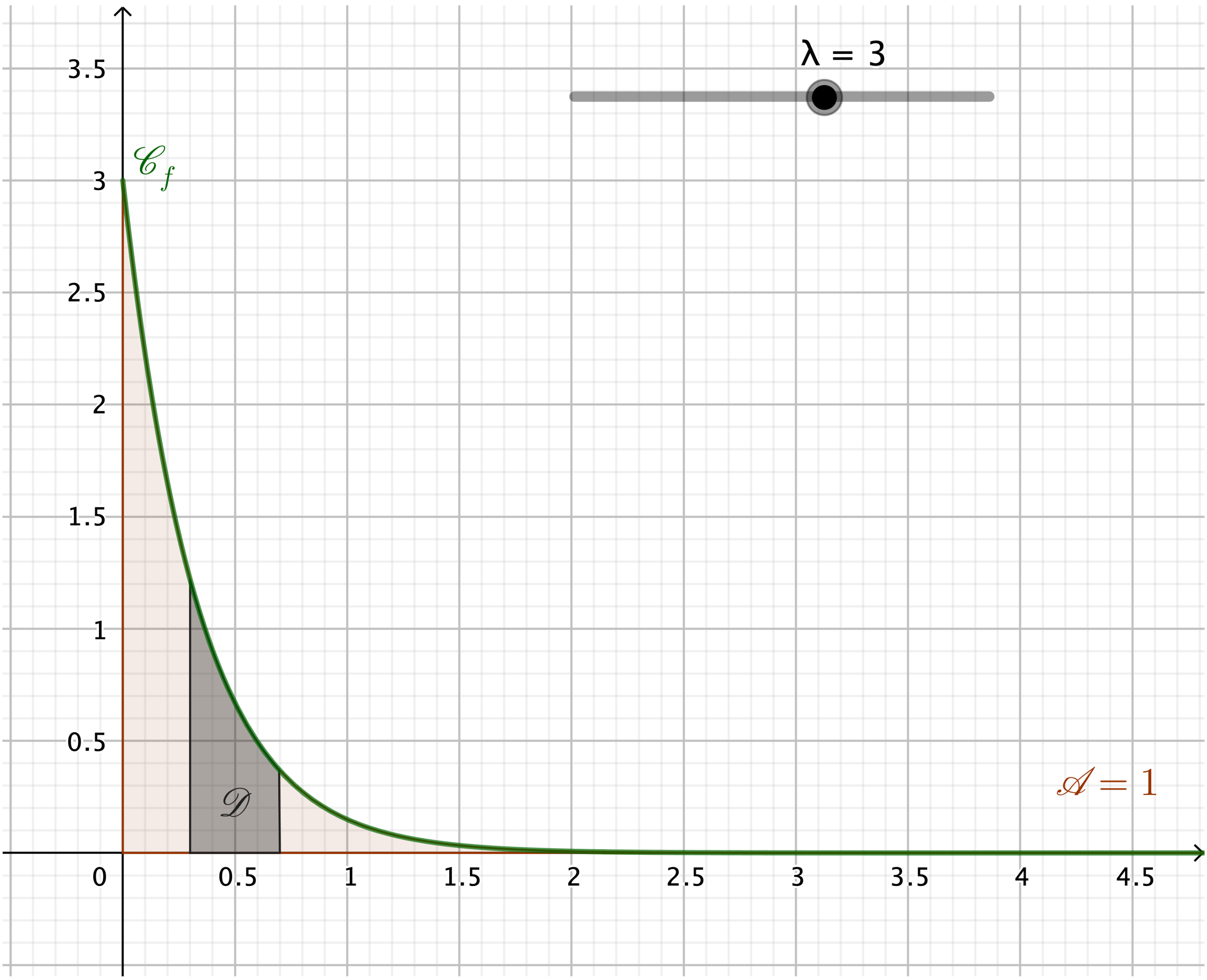
Soit λ un nombre réel strictement positif.

La fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur $[0;+\infty[$.



Définition

On appelle loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, notée $E(\lambda)$, la loi de probabilité dont la densité est la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.



Propriété

Soient a, c et d trois nombres réels positifs tels que $c < d$.

- $\mathbb{P}(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$
- $\mathbb{P}(X \geq a) = e^{-\lambda a}$
- $\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

Démonstration

$\mathbb{P}(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^a = -e^{-\lambda a} - \left(-e^{-\lambda \times 0}\right) = -e^{-\lambda a} + 1 = 1 - e^{-\lambda a}$

$\mathbb{P}(X \geq a) = 1 - \mathbb{P}(X \leq a) = 1 - \left(1 - e^{-\lambda a}\right) = 1 - 1 + e^{-\lambda a} = e^{-\lambda a}$

$\mathbb{P}(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_c^d = -e^{-\lambda d} - \left(-e^{-\lambda c}\right) = -e^{-\lambda d} + e^{-\lambda c} = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$

Définition

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

La fonction de répartition de X est la fonction F définie sur $[0; +\infty]$ par $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$.

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

L'espérance de X est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

La variance de X est $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$. (pas au programme)

Propriété

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

$\forall t > 0, \forall h > 0, \mathbb{P}_{X>t}(X > t + h) = \mathbb{P}(X > h)$ On dit que la loi exponentielle est sans vieillissement ou avec absence de mémoire.

Démonstration

$\mathbb{P}_{X>t}(X > t + h) = \frac{\mathbb{P}((X>t)\cap(X>t+h))}{\mathbb{P}(X>t)} = \frac{\mathbb{P}(X>t+h)}{\mathbb{P}(X>t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = \mathbb{P}(X > h)$

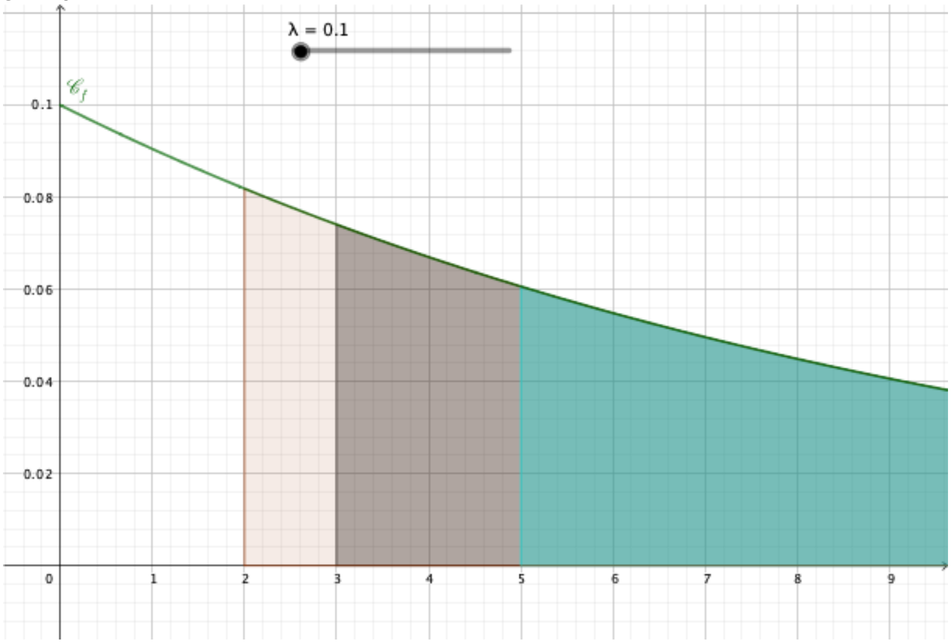
Exemple

Soit un appareil dont la durée de vie en années est une varaibale aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,1$.

1. Calculer $\mathbb{P}_{X>3}(X > 5)$.
2. Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

> 1. $\mathbb{P}_{X>3}(X > 5) = \mathbb{P}_{X>3}(X > 3 + 2) = \mathbb{P}(X > 2) = e^{-0,1\times 2} = e^{-0,2}$
> 2. $\mathbb{P}_{X>3}(X > 5) = \mathbb{P}(X > 2)$
>   Donc si l'appareil a fonctionné pendant plus de 3 ans, la probabilité qu'il fonctionne encore 2 ans de plus est la même que la probabilité (non conditionnelle) de fonctionner pendant plus de 2 ans.

grahiquement



Graphiquement, le quotient de l'aire bleue par l'aire noire est égal à l'aire rouge.

IV - Quelques problèmes

1. Durée de vie d'un atome radioactif

La durée de vie, en années, d'un atome de carbone 14 peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ.
On appelle demi-vie de cet atome le réel t tel que la probabilité qu'il se désintègre avant t années soit égale à $\frac{1}{2}$.

On sait que la demi-vie du carbone 14 est égale à 5 730 ans.

1. Calculer le paramètre λ de la loi modélisant la durée de vie X du carbone 14.
2. Dans la suite on prendra $\lambda = 12 \times 10^{-5}$.
   Calculer la probabilité qu'un atome de carbone 14 se désintègre avant 2000 ans.
3. Quelle est la probabilité que la durée de vie du carbone 14 soit supérieure à deux demi-vies?
4. Déterminer la valeur de x telle que $\mathbb{P}(X > x) = 0,01$.
   Interpréter ce résultat.

2. Lien entre une loi géométrique et une loi exponentielle

Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1.
On note $Y = \lceil X \rceil$ sa partie entière "supérieure", c'est-à-dire que $\lceil 1.5 \rceil = 2$ et $\lceil 3 \rceil = 3$.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par Y?
2. Démontrer que $Y = n \Leftrightarrow n - 1 < X \leq n$.
3. Démontrer que Y suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre. *On pourra poser* $p = 1 - e^{-1}$.
4. On note $Z = Y - X$. Démontrer que Z est à valeurs dans $[0; 1[$.
5. Soit $t \in [0; 1[$. Démontrer que $Z \leq t \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}^*, n - t \leq X \leq n$.
6. Quelle est la fonction de répartition de Z?
7. En déduire que Z est une variable aléatoire à densité dont la densité est $\forall t \in [0; 1], f(t) = \frac{e^{-t}}{1-e^{-1}}$.

3. Utilisation de la loi uniforme

Temps d'attente pour accorder un piano

Antoine un accordeur de piano devant gérer des déplacements, ainsi que des temps de travail, très aléatoires, préfère donner une plage horaire indicative de deux heures à chacun de ses clients. Ainsi il a prévenu sa cliente, Isolde, qu'il arriverait entre 13h00 et 15h00. On note H la variable aléatoire correspondant au temps d'attente d'Isolde.
On admet que H suit une loi uniforme.

1. Déterminer la fonction de densité de la loi uniforme suivie par H.
2. Déterminer la probabilité qu'Isolde attende plus d'une demi-heure?
3. Quelle est la probabilité qu'Isolde arrive:
   a) à 14h00?
   b) avant 13h15?
   c) entre 13h30 et 14h00?
   d) après 14h20?
4. A 14h15, Antoine n'est toujours pas arrivé. Quelle est la probabilité qu'il arrive dans plus de 5 minutes?
5. Il est maintenant 14h30 et Isolde doit impérativement partir à son travail à 14h50. Quelle est la probabilité qu'Antoine arrive avant le départ d'Isolde?
6. Quel est le temps d'attente moyen d'un client d'Antoine?