Chapitre III - Dérivation et application aux fonctions polynômes

I - Un peu d'histoire

Le calcul différentiel s'est imposé par sa capacité à donner des solutions simples à des problèmes nombreux d'origines variées (cinématique, mécanique, géométrie, optimisation).

Le célèbre mathématicien grec Archimède de Syracuse (-287 ; -212) le premier semble s'intéresser à la notion de tangente. Des siècles plus tard, le mathématicien italien Torricelli (1608-1646) et le français Roberval (1602-1675) prolongent la méthode d'Archimède et apportent les premières pierres à un édifice majeur des mathématiques, le calcul infinitésimal.
Les méthodes analytiques de Descartes et de Fermat ont beaucoup de succès en Angleterre et sont donc reprises par John Wallis (1616-1707) et James Gregory (1638-1675). Ceci pousse le mathématicien Issac Barrow (1630-1677)à la chaire de mathématique de l'université de Cambridge à développer une méthode des tangentes par le calcul, très proche de celle actuellement utilisée. Il expose cette méthode dans ses cours.
Puis le mathématicien anglais Isaac Newton (1643-1727) et allemand Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), indépendamment l'un de l'autre, inventent des procédés algorithmiques ce qui tend à faire de l'analyse dite infinitésimale, une branche autonome des mathématiques. Newton publie en 1736 sa méthode la plus célèbre, la méthode des fluxions et des suites infinies. C'est au XVIIIe siècle que Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) introduit la définition plus rigoureuse du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement - sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours. Cependant, à l'époque de d'Alembert, c'est la notion de limite qui pose problème. C'est seulement avec les travaux de Karl Weierstrass au milieu du 19e siècle que le concept de dérivée sera entièrement formalisé.

Sources: math93.com

II - Notion de limite

Définition 1

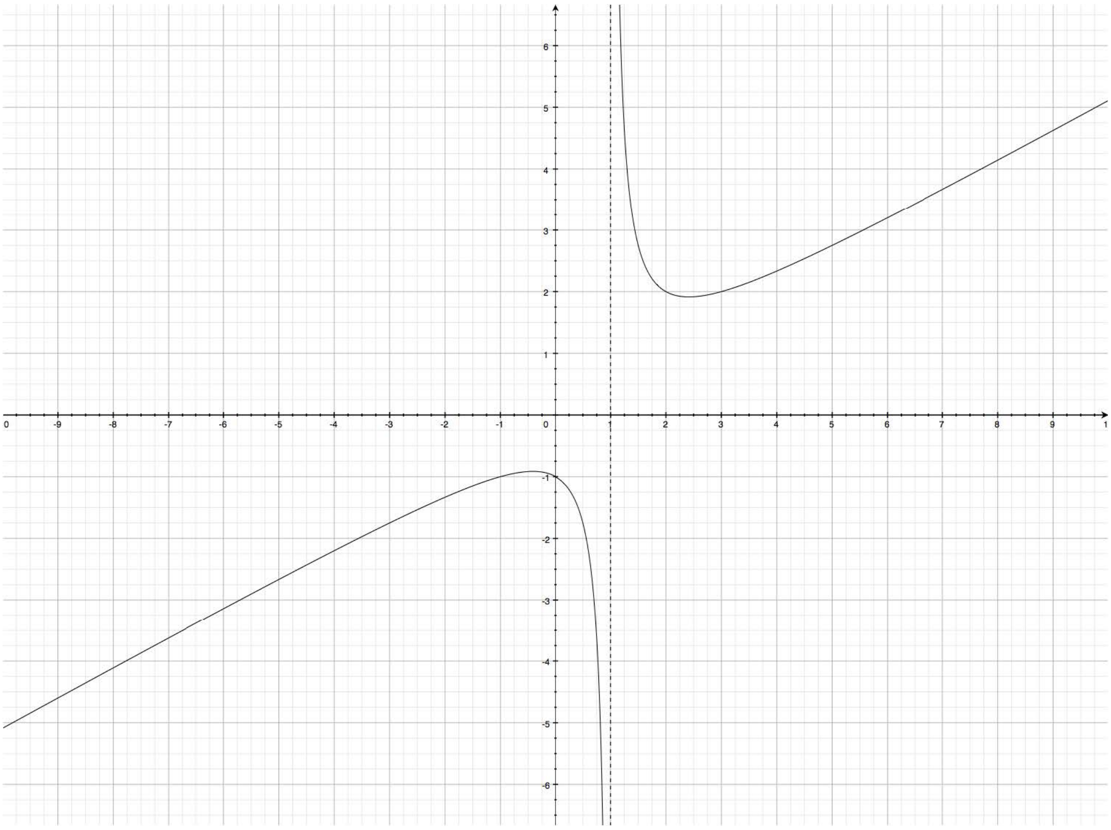
> Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre réel de I. On appelle limite de $f(x)$ en a la valeur l vers lequel se rapproche $f(x)$ lorsque x se rapproche de la valeur a. On note $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Remarque

> La valeur l peut être un nombre réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Exemple:

La représentation graphique ci-dessous est celle de la fonction f.



Déterminer graphiquement:

- $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$
- $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

> $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 2$
> $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
> $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$
> On ne peut déterminer $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ car on ne sait pas si on est à droite ou à gauche de la ligne pointillée d'équation $x = 1$. Il faut donc distinguer deux cas:
> $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x<1}} f(x) = -\infty$
> $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x>1}} f(x) = +\infty$

Exemple:

Déterminer les limites suivantes:

- $\lim\limits_{x \to 3} 3x^2 - 4x + 1$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 - 25x^2 + 754x - 1$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7}{3x+5}$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} \frac{1}{2x-8}$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \frac{1}{2x-8}$

> > $\lim\limits_{x \to 3} 3x^2 - 4x + 1 = 16$
> > $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 - 25x^2 + 754x - 1 = -\infty$
> > $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{7}{3x+5} = 0$
> > $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x > 4}} \frac{1}{2x-8} = +\infty$
> > $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x < 4}} \frac{1}{2x-8} = -\infty$

III - Nombre dérivé

Définition 2

> On appelle taux de variation de la fonction f entre x_1 et x_2 le nombre $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

Exemples:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x^2 - 3x + 1$.

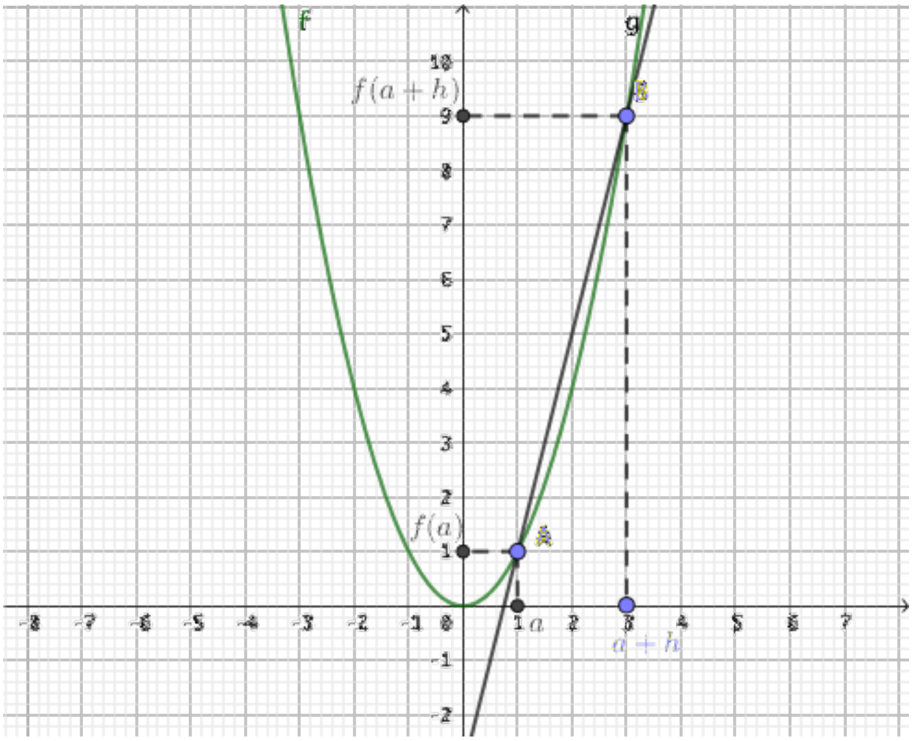
Déterminer le taux de variation de f entre 1 et 2.

> > $\frac{f(2)-f(1)}{2-1} = \frac{11-2}{1} = 9$.

Remarque

> Le taux de variation de la fonction f entre a et $a + h$ est le nombre $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

remarque



> Sur la figure ci-dessus, le point A a pour coordonnées $(a; f(a))$ et le point B a pour coordonénes $(a+h; f(a+h))$. Le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ est donc le coefficient directeur de la droite (AB).

Définition 3

> Une fonction f est dérivable en un nombre a si et seulement si le taux de variation de la fonction f entre a et $a+h$ tend vers un nombre réel (pas $+\infty$, pas $-\infty$) lorsque h tend vers 0. Ce nombre réel est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$. On peut donc écrire: $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Exemples:

Déterminer, si ils éxistent, les nombres dérivés en 1 puis en 0 des fonctions suivantes:

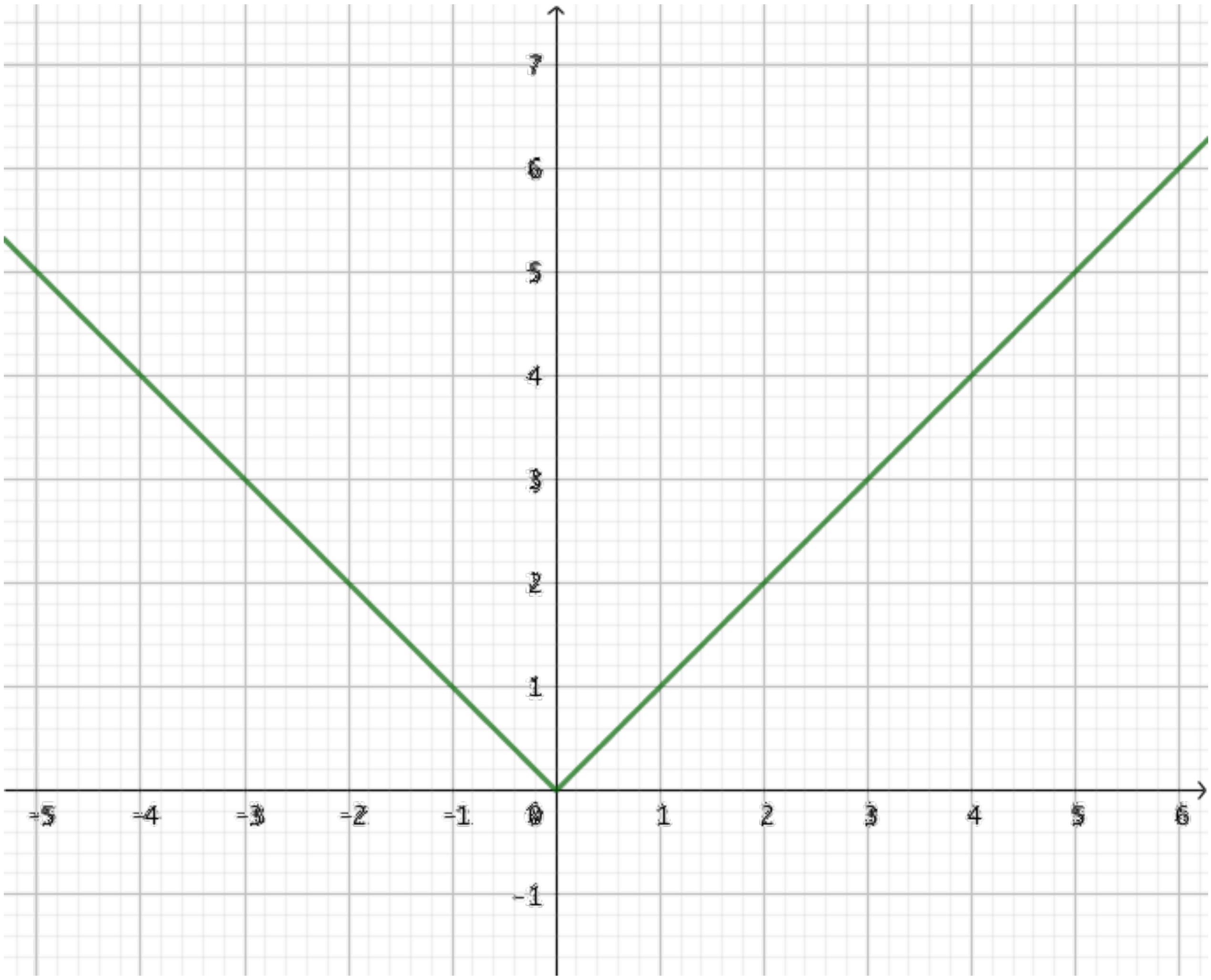
- $f : x \in \mathbb{R} \mapsto 3x - 8$
- $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2$
- $p : x \in \mathbb{R} \mapsto |x|$

> > $\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \frac{[3(1+h)+8]-(3\times1+8)}{h} = \frac{3+3h+8-3-8}{h} = \frac{3h}{h} = 3$
> > $\lim\limits_{h\to0} 3 = 3 \in \mathbb{R}$
> > donc $f'(1) = 3$
> >
> > $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{[3(0+h)+8]-(3\times0+8)}{h} = \frac{3h+8-8}{h} = \frac{3h}{h} = 3$
> > $\lim\limits_{h\to0} 3 = 3 \in \mathbb{R}$
> > donc $f'(0) = 3$
> >
> > $\frac{g(1+h)-g(1)}{h}$ =\frac{(1+h)^2-1^2}{h} = $\frac{1+2h+h^2-1}{h} = \frac{2h+h^2}{h} = \frac{h(2+h)}{h} = 2+h$
> > $\lim\limits_{h\to0} 2+h = 2 \in \mathbb{R}$
> > donc $g'(1) = 2$
> >
> > $\frac{g(0+h)-g(0)}{h}$ =\frac{(0+h)^2-0^2}{h} = $\frac{h^2}{h} = h$

$\lim\limits_{h \to 0} h = 0 \in \mathbb{R}$
donc $g'(0) = 0$

$\frac{p(1+h)-p(1)}{h} = \frac{|1+h|-|1|}{h} = \frac{1+h-1}{h} = \frac{h}{h} = 1$ (on suppose $h > -1$ car $h \to 0$)
$\lim\limits_{h \to 0} 1 = 1 \in \mathbb{R}$
donc $p'(1) = 1$

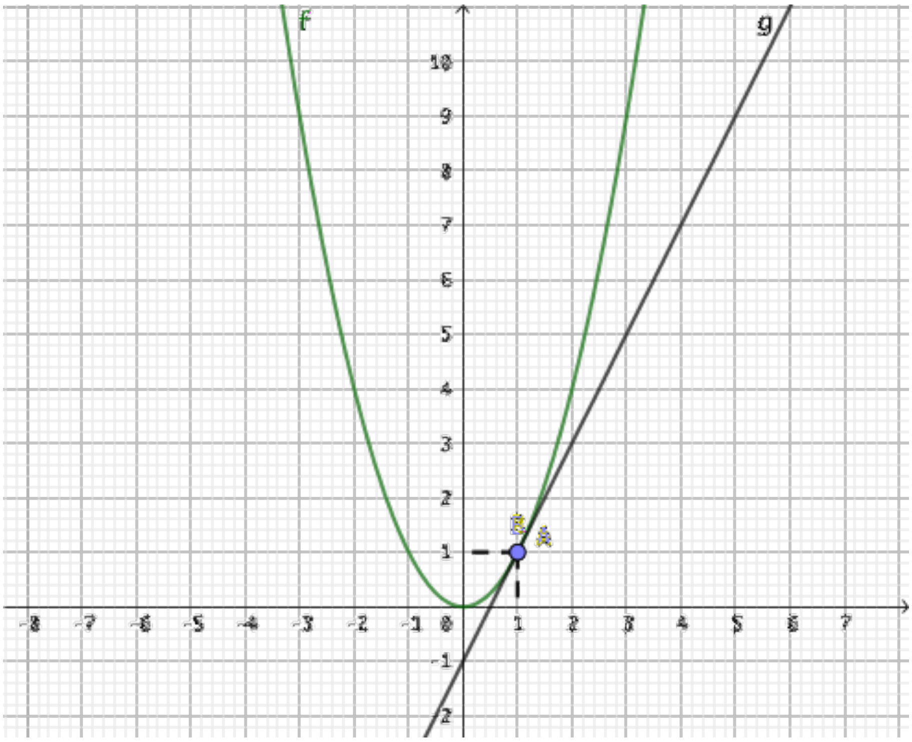
$\frac{p(0+h)-p(0)}{h} = \frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}$
or $|h| = h$ si $h > 0$ et $|h| = -h$ si $h < 0$
Il faut donc voir les deux cas suivants:
1^{er} cas: $h > 0$
$\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1$ $\lim\limits_{h \to 0^+} 1 = 1 \in \mathbb{R}$
$2^{ème}$ cas: $h < 0$
$\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1$ $\lim\limits_{h \to 0^-} -1 = -1 \in \mathbb{R}$
Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{p(0+h)-p(0)}{h}$ n'existe pas.
La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.



On peut remarquer qu'on ne peut pas construire de tangente à la courbe représentative de la fonction valeur absolue en 0.

Définition 4

La tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est la droite « limite » des sécantes lorsque le point B se rapproche du

> point A.
>
> 
>

Définition 5

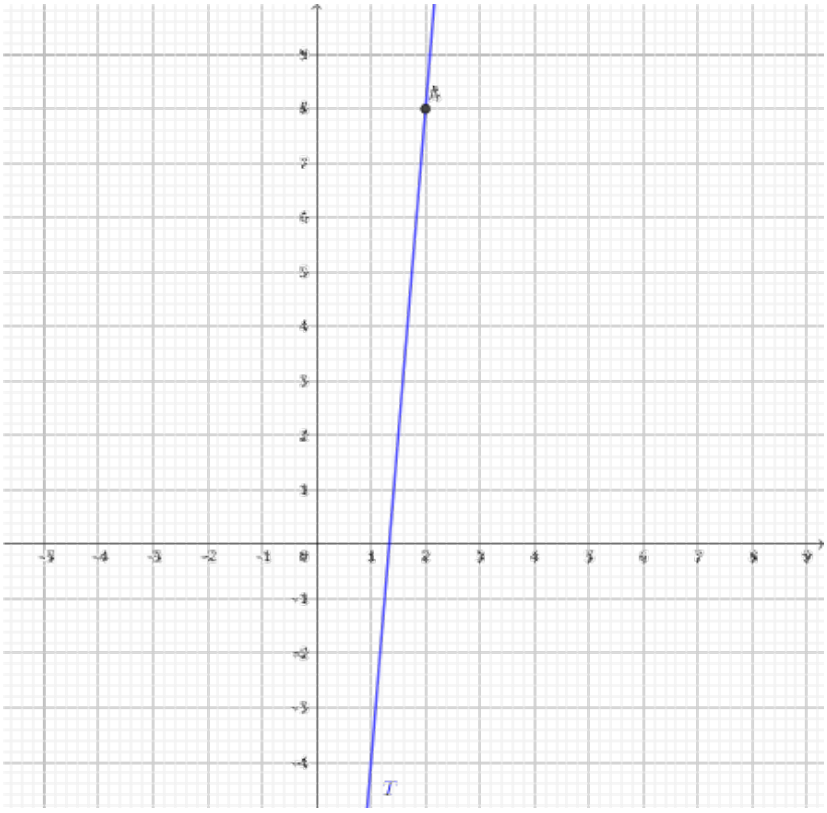
> Soit $a \in \mathbb{R}$. Si f est une fonction dérivable en a, on appelle tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a la droite T passant par le point $A\,(a;f(a))$ dont le coefficient directeur est le nombre dérivé $f'(a)$.

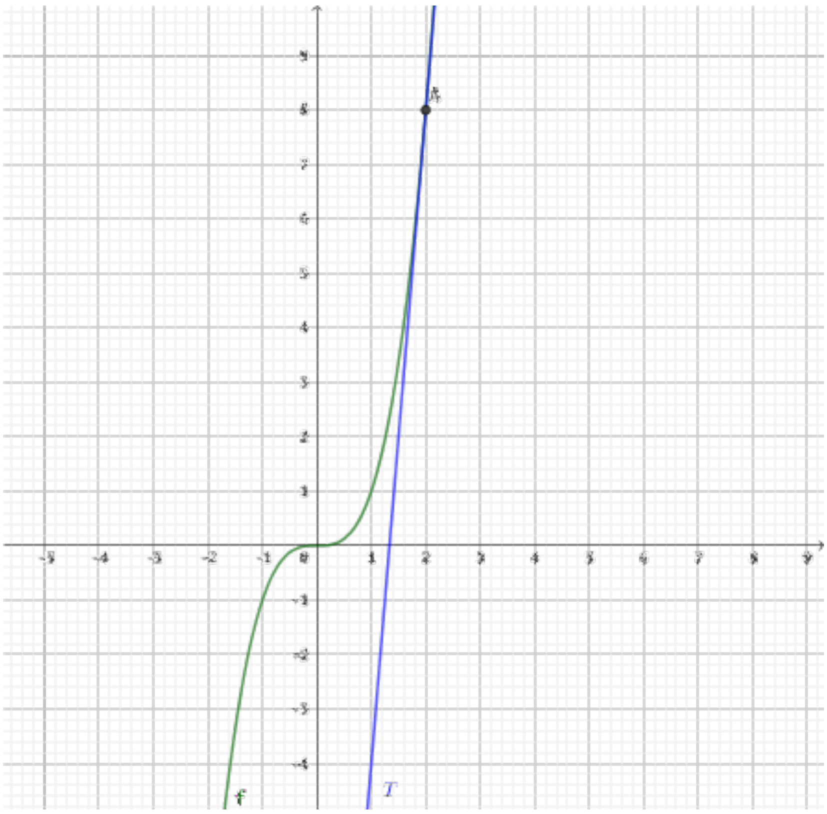
Exemple:

Soit f la fonction cube. On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Déterminer $f'(2)$ s'il existe.
2. Calculer $f(2)$.
3. Tracer la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.
4. Tracer $\mathscr{C}_f$.

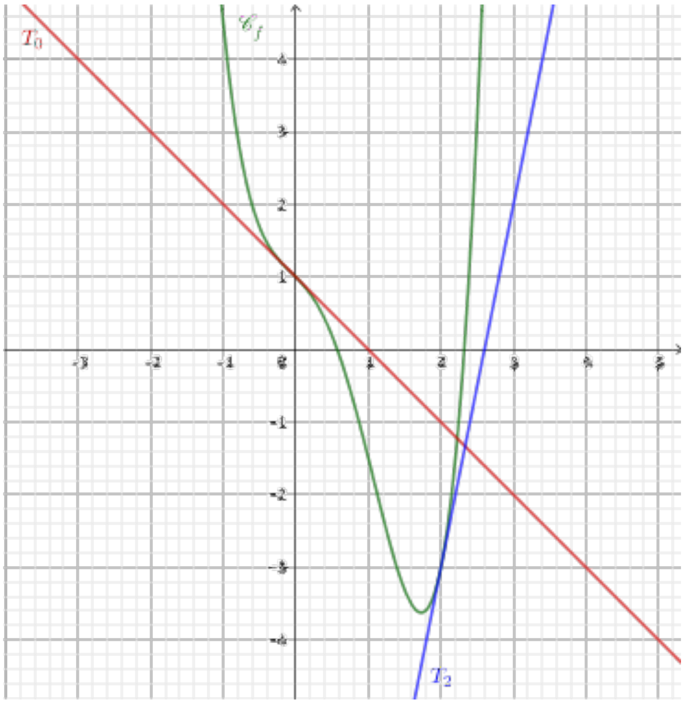
>> 1. $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{(2+h)^3-2^3}{h} = \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \frac{12h+6h^2+h^3}{h} = \frac{h(12+6h+h^2)}{h} = 12+6h+h^2$
>> $\lim\limits_{h\to 0} 12+6h+h^2 = 12 \in \mathbb{R}$
>>   donc $f'(2) = 12$
>>
>> 2. $f(2) = 2^3 = 8$

3. 

4. 

Exemple:

Soti f la fonction représentée par la courbe $\mathscr{C}_f$ ci-dessous.
La droite T_0 est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
La droite T_2 est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.



Déterminer graphiquement $f'(0)$ et $f'(2)$.

> > $f'(0) = -1$ $f'(2) = 5$

Propriété 1

> Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable en a. L'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est :
> $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Démonstration

> Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit f une fonction dérivable en a.
> L'équation réduite d'une droite dst de la forme $y = mx + p$.
> Le coefficient directeur de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse a est le nombre dérivé $f'(a)$.
> Donc on peut écrire l'équation réduite de T:
> $y = f'(a)x + p$
> Il nous reste à trouver p.
> Nous savons que T passe par le point $A(a; f(a))$ donc on peut écrire: $f(a) = f'(a)a + p$
> d'où $p = f(a) - f'(a)a$.
> On remplace l'expression de p dans l'équation réduite:
> $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a$
> $y = f'(a)x - f'(a)a + f(a)$
> $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

Exemple:

Soit la fonction f définie pour tout nombre réel x par $f(x) = 4x^2 - 2x + 1$.

1. Calculer $f(2)$.
2. Calculer $f'(2)$.
3. En déduire l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 2.

> > 1. $f(2) = 4 \times 2^2 - 2 \times 2 + 1 = 13$

> 2. $\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{[4(2+h)^2-2(2+h)+1]-13}{h} = \frac{4(4+4h+h^2)-4-2h+1-13}{h} = \frac{16+16h+4h^2-4-2h+1-13}{h} = \frac{14h+4h^2}{h} = \frac{h(14+4h)}{h} = 14+4h$
>   Or $\lim_{h \to 0} 14+4h = 14 \in \mathbb{R}$
>   Donc $f'(2) = 14$
> 3. L'équation réduite de la tangente T est:
> $y = f'(2)(x-2) + f(2)$
> $y = 14(x-2) + 13$
> $y = 14x - 28 + 13$
> $y = 14x - 15$

IV - Fonctions dérivées

Définition 6

> Soit I un intervalle. La fonction f est dérivable sur I si et seulement si $\forall a \in I, f$ est dérivable en a.
> On appelle fonction dérivée de f la fonction qui, à tout réel x, associe $f'(x)$. On la note f'.

tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles

la fonction f définie par:	sur	fonction dérivée définie par	sur
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$

Démonstration

> Nous allons démontrer que la fonction dérivée de la fonction carrée f est la fonction $f' : x \in \mathbb{R} \mapsto 2x$.
> Soit $a \in \mathbb{R}$. $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{(a+h)^2-a^2}{h} = \frac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \frac{2ah+h^2}{h} = \frac{h(2a+h)}{h} = 2a+h$
> Or $\lim_{h \to 0} 2a+h = 2a \in \mathbb{R}$ car $a \in \mathbb{R}$.
> Donc $f'(a) = 2a$. On vient de démontrer que $\forall a \in \mathbb{R}, f'(a) = 2a$.
> Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2x$.

Définition 7

> Soient u et v deux fonctions définies et dérivbles sur un intervalle I. Soit $k \in \mathbb{R}$.

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée
Dérivée d'une somme	$u+v$	$u' + v'$
Dérivée d'une différence	$u-v$	$u' - v'$
Dérivée du produit par une constante	ku	ku'

Exemple:

Soit P la fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 3x^4 - 6x^3 + 7x^2 - 3x + 1$. Déterminer $P'(x)$.

>> $P'(x) = 3 \times 4x^3 - 6 \times 3x^2 + 7 \times 2x - 3 = 12x^3 - 18x^2 + 14x - 3$

Définition 8

> Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
>
> - $\forall x \in I, f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ est strictement croissante.
> - $\forall x \in I, f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est strictement décroissante.
> - $\forall x \in I, f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante.

Remarque

> - $\forall x \in I, f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow f$ est croissante.
> - $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante.

Définition 9

> Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
> La fonction f admet un extremum local si et seulement si $\exists x_0 \in I, f'(x)$ change de signe en x_0 et $f'(x_0) = 0$

Remarque

> Il existe deux type d'extrema: le maximum et le minimum.

Exemple:

Soit P la fonction polynômiale définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 15$.

1. Déterminer $P'(x)$.
2. En déduire les variations de la fonction P.
3. La fonction P admet-elle des extréma? Si oui, en donner les caractéristiques.

>> 1. $P'(x) = 2 \times 3x^2 - 3 \times 2x - 36 = 6x^2 - 6x - 36$
>> 2. $\Delta = (-6)^2 - 4 \times 6 \times (-36) = 36 + 864 = 900$
>> $\Delta > 0$ donc P' admet deux racines:
>> $x_1 = \frac{-(-6)-\sqrt{900}}{2\times 6} = \frac{6-30}{12} = \frac{-24}{12} = -2$
>> $x_1 = \frac{-(-6)+\sqrt{900}}{2\times 6} = \frac{6+30}{12} = \frac{36}{12} = 3$
>>   On peut donc dresser le tableau de variations suivant:
>>
>> | x | $-\infty$ | | -2 | | 3 | | $+\infty$ |
>> |---|---|---|---|---|---|---|---|
>> | $P'(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |
>> | $P(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | 59 | $\searrow$ | -66 | $\nearrow$ | $+\infty$ |
>>
>> 3. La fonction P admet donc :

- Un maximum local qui vaut 59 et qui est atteint pour $x = -2$.
- Un minimum local qui vaut -66 et qui est atteint pour $x = 3$.