Chapitre II – Trigonométrie

I. Un peu d'histoire

Le mot vient du grec "trigone" (triangle) et "metron" (mesure).

Dans l'Encyclopédie (1751), Jean le Rond d'Alembert (1717 ; 1783) définit la trigonométrie comme « l'art de trouver les parties inconnues d'un triangle par le moyen de celles qu'on connaît ». Et pourtant la trigonométrie n'est pas à l'origine un outil de calcul du triangle mais du cercle.

Il faut remonter jusqu'aux babyloniens, 2000 ans avant notre ère, pour trouver les premières traces de tables de données astronomiques. Car à la base, la trigonométrie est une géométrie appliquée à l'étude du monde, de l'univers et est indissociable de l'astronomie.

L'héritage de ces tables données aux grecs et la numération sexagésimale des babyloniens (base 60) contribuera à l'introduction du partage du cercle en 360°.

Eratosthène de Cyrène (-276 ; -196) et Aristarque de Samos (-310 ; -230) utilisent ces tables pour l'astronomie. Eratosthène se rendra célèbre pour avoir calculé la circonférence de la terre avec une précision tout à fait remarquable (seulement 3% d'erreur).

Mais on attribue à Hipparque de Nicée (-190 ; -120) les premières tables trigonométriques. Elles font correspondre l'angle au centre et la longueur de la corde interceptée dans le cercle.

Dès le XIIIe siècle, les arabes, tel que le perse Mohammed al Khwarizmi (780 ; 850) traduisent les ouvrages provenant d'Orient.

Plus tard, l'astronome et mathématicien Regiomontanus, de son vrai nom Johann Müller développe la trigonométrie comme une branche indépendante des mathématiques. Il serait à l'origine de l'usage systématique du terme sinus.

Au XVIe siècle, le français François Viète (1540 ; 1607), conseiller d'Henri IV, fera évoluer la trigonométrie pour lui donner le caractère qu'on lui connaît aujourd'hui.

De nos jours, la trigonométrie trouve des applications très diverses, particulièrement dans les sciences physiques. La propagation des ondes, par exemple, est transcrite par des fonctions trigonométriques.

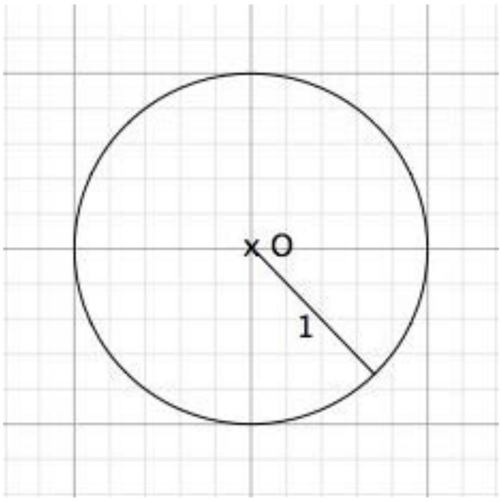
Sources : M@ths et tiques

II. Cercle trigonométrique

1. Enroulement de la droite des réels autour du cercle trigonométrique

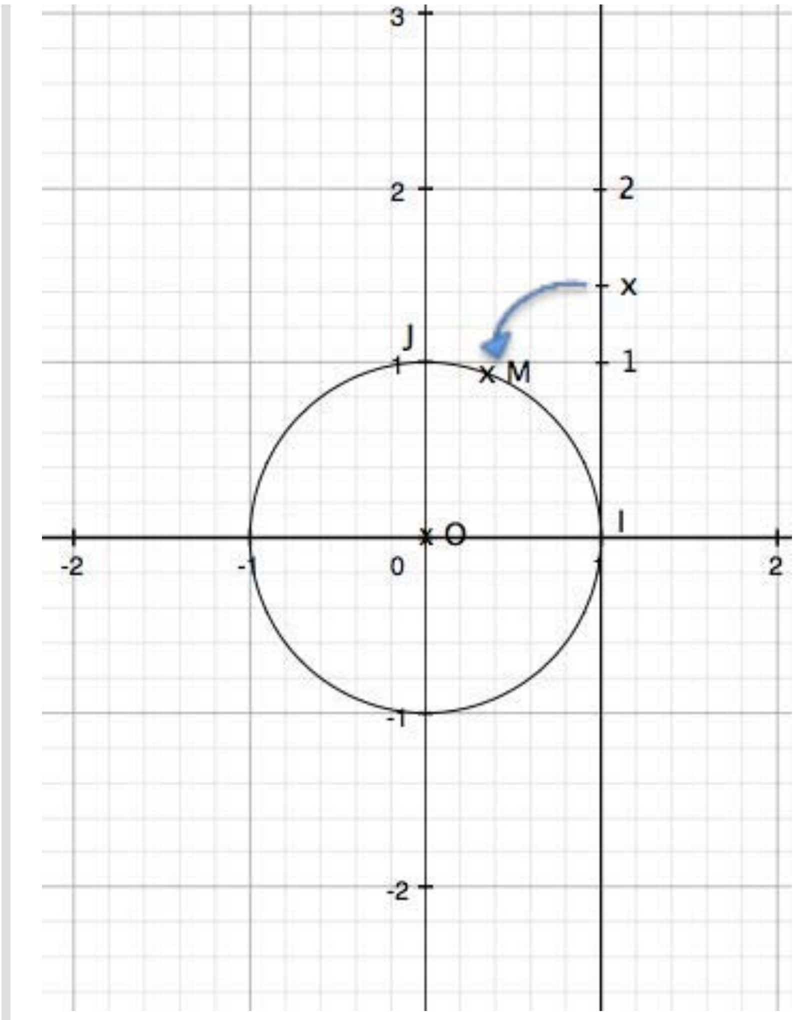
Définition 1

Un **cercle trigonométrique** de centre O est celui de rayon 1 qui est muni d'un sens direct : le sens inverse des aiguilles d'une montre.



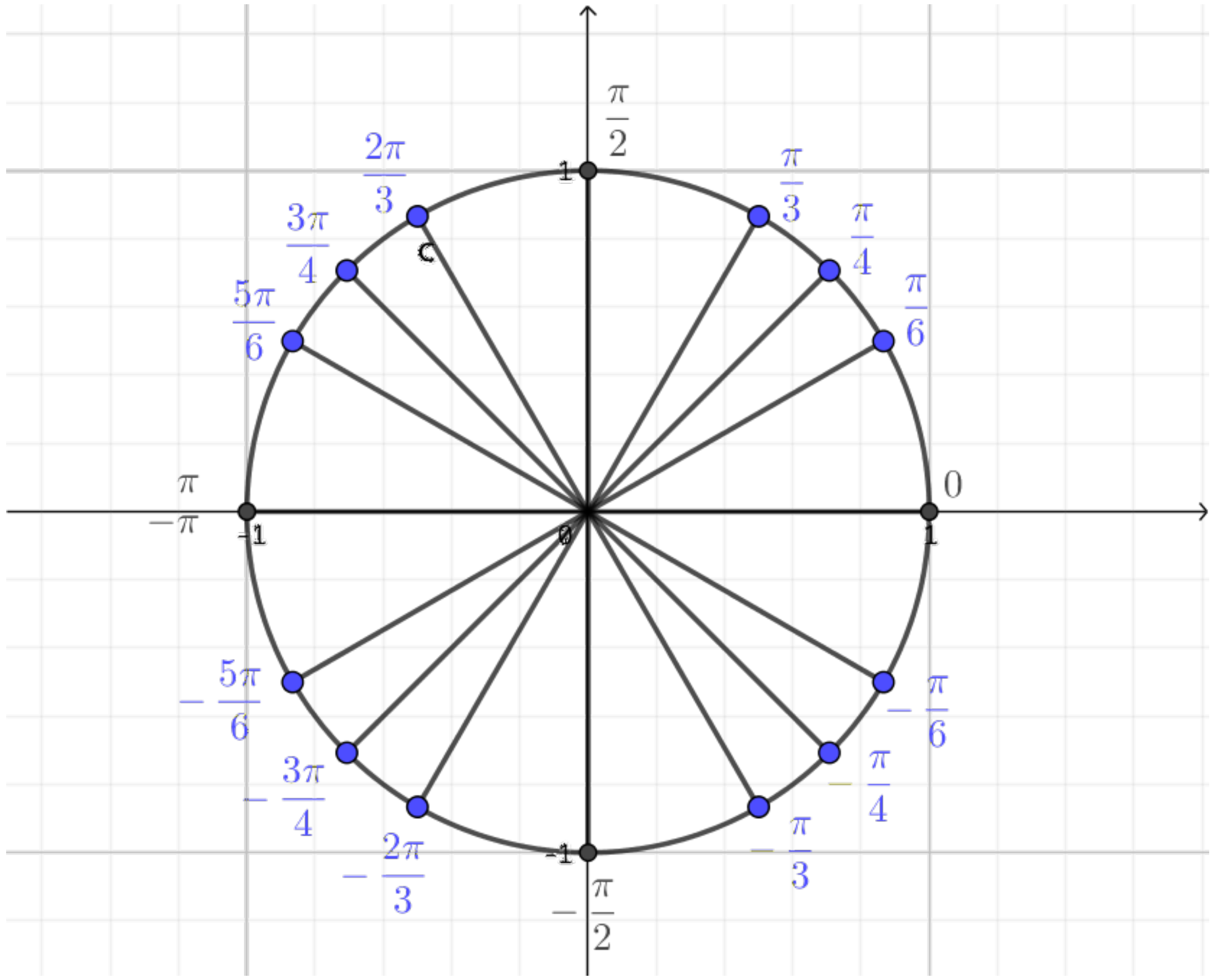
Définition 2

Dans un repère orthonormé (O, I, J), on considère le cercle trigonométrique de centre O et la droite graduée (d) perpendiculaire à l'axe des abscisses et dont l'origine coïncide avec le point I. On enroule la droite (d) sur le cercle, ainsi tout nombre réel x vient s'appliquer sur un point M du cercle. On dit que M est l'image du nombre réel x.



Exemple:

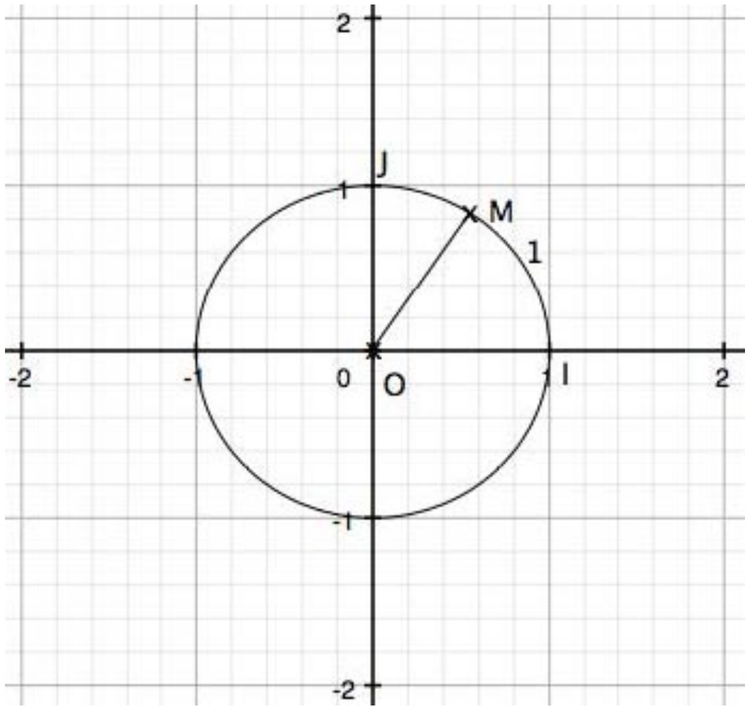
Placer sur le même cercle trigonométrique les points images des nombres 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\pi$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{6}$, $-\frac{2\pi}{3}$, $-\frac{5\pi}{6}$ et $-\frac{3\pi}{4}$.



2. Le radian

Définition 3

> Soit un cercle trigonométrique de centre O. Un radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte sur le cercle un arc de longueur 1.



Propriété 1

> La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle au centre qui l'intercepte.

Exemple:

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 3 cm et de centre O. Soient A et B deux points du cercle $\mathscr{C}$ tels que $\widehat{AOB} = \frac{\pi}{3}$. Calculer la longueur de l'arc $\widehat{AB}$.

> On complète le tableau de proportionnalité suivant:
>
> | angle | longueur de l'arc |
> |---|---|
> | 2π | 6π |
> | $\frac{\pi}{3}$ | |
>
> Ainsi $\widehat{AB} = \frac{6\pi\times\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \pi$ cm.

Remarque:

> Soit M l'image sur le cercle trigonométrique d'un nombre réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant \pi$. On a donc $\widehat{IOM} = x$ rad.
> Soit M l'image sur le cercle trigonométrique d'un nombre réel x tel que $-\pi \leqslant x \leqslant 0$. On a donc $\widehat{IOM} = -x$ rad.
> Soit M l'image sur le cercle trigonométrique d'un nombre réel x tel que $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$. On a donc $\widehat{IOM} = |x|$ rad.

4. Sinus et cosinus d'un nombre réel

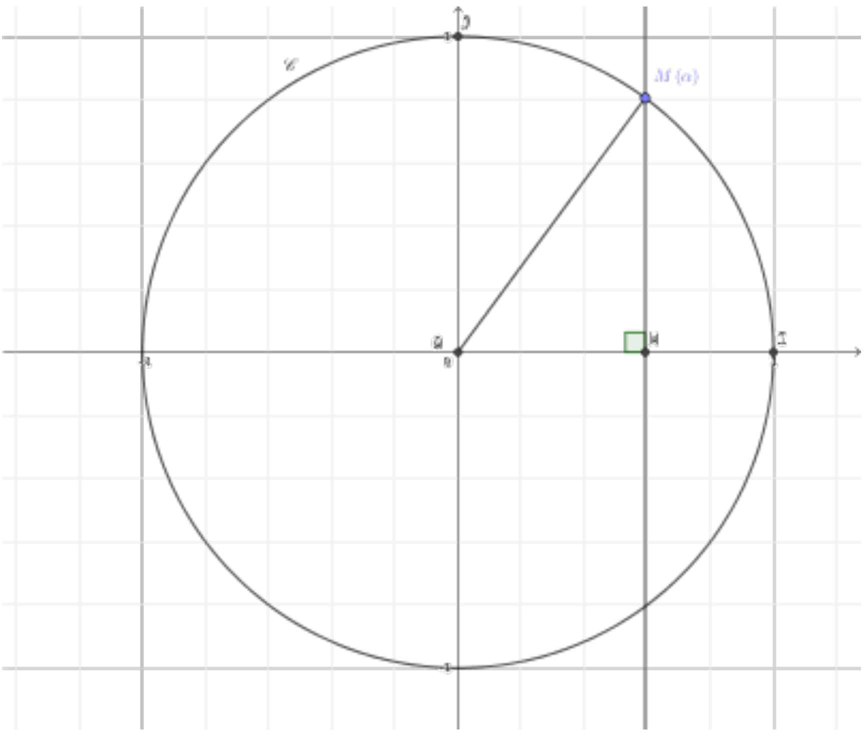
Définition 4

> Soit x un nombre réel et M le point image de x sur le cercle trigonométrique de centre O dans un repère orthonormé d'origine O. Le cosinus de x noté $\cos(x)$ est l'abscisse du point M et le sinus de x noté $\sin(x)$ est l'ordonnée du point M.

Propriété 2

> Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a:
>
> - $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
> - $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
> - $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$
> - $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$
> - $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$

Remarque

> Dans le repère (O, I, J), on considère $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. Soit $\alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ un nombre réel d'image M sur le cercle $\mathscr{C}$. On considère le point H, pied de la hauteur du triangle OMI. Le triangle HOM est donc rectangle en H. Ainsi on a:
>
> 
>
> - $\cos\left(\widehat{IOM}\right) = \frac{OH}{OM} = \frac{OH}{1} = OH = abscissedeM = \cos(\alpha)$
> - $\sin\left(\widehat{IOM}\right) = \frac{HM}{OM} = \frac{HM}{1} = HM = ordonnéedeM = \sin(\alpha)$

Propriété 3

> Soit $x \in \mathbb{R}$. On a:
>
> - $\cos(-x) = \cos(x)$
> - $\sin(-x) = -\sin(x)$
> - $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
> - $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
> - $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
> - $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
> - $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$
> - $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
> - $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
> - $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

Exemple:

On donne $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.
Calculer $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right)$, $\cos\left(3\frac{\pi}{8}\right)$, $\cos\left(5\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right)$, $\sin\left(3\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(5\frac{\pi}{8}\right)$.
On pourra calculer au préalable $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}$, $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$ et $\pi - \frac{\pi}{8}$.

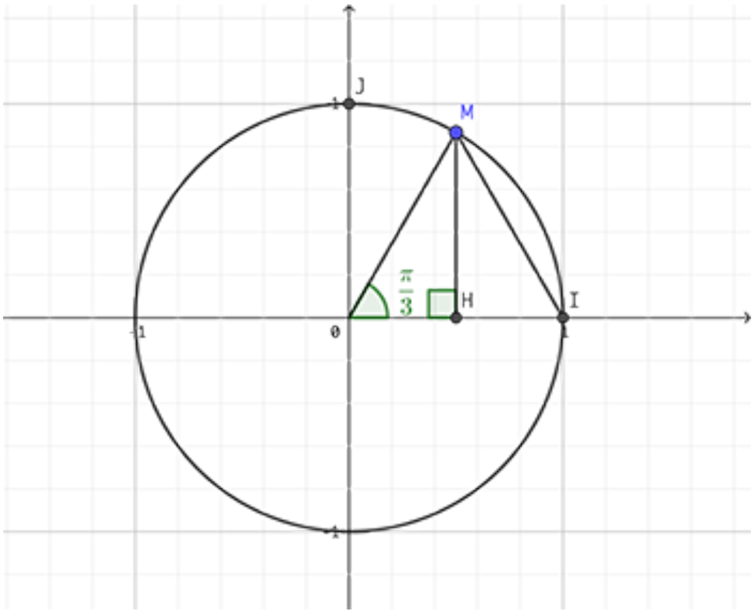
>> $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} = \frac{3\pi}{8}$
>> $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{5\pi}{8}$
>> $\pi - \frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$
>>
>> Ainsi:
>>
>> - $\frac{\pi}{8} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$.
>>   De plus, $\left(\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = 1$
>>   Donc:
>> $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = 1$
>> $\frac{2+\sqrt{2}}{4} + \left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = 1$
>> $\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = 1 - \frac{2+\sqrt{2}}{4}$
>> $\left(\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\right)^2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$
>> $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$ car $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$
>>   donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
>> - $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
>> - $\cos\left(3\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
>> - $\cos\left(5\frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

> - $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$
> - $\sin\left(3\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$
> - $\sin\left(5\frac{\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Démonstration du calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$***,*** $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ ***et*** $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$

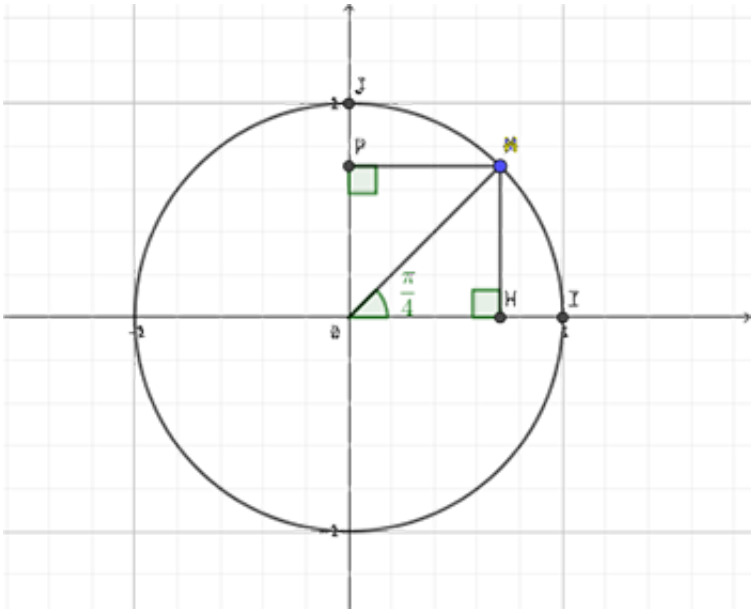
Commençons par $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Dans le repère (O, I, J), on considère le point M image du nombre $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique de centre O. Soit H le pied de la hauteur du triangle IOM issue de M.



Le triangle IOM est isocèle en O et $\widehat{IOM} = \frac{\pi}{3}$ donc le triangle IOM est équilatéral.
$[MH]$ étant la hauteur du triangle équilatéral IOM issue de M (et donc relative à H), elle est aussi médiatrice du côté $[OI]$ et le coupe donc en son milieu. Ainsi H est le milieu du segment $[OI]$.
On a donc $OH = \frac{1}{2}$ c'est-à-dire $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.
Dans le triangle MOH rectangle en H, on applique le théorème de Pythagore:
$OM^2 = OH^2 + HM^2$
$1^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + HM^2$
$1 = \frac{1}{4} + HM^2$
$HM^2 = 1 - \frac{1}{4}$
$HM^2 = \frac{3}{4}$
$HM = \sqrt{\frac{3}{4}}$
$HM = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Interressons-nous maintenant à $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$
Dans le repère (O, I, J), on considère le point M image du nombre $\frac{\pi}{4}$ sur le cercle trigonométrique de centre O. Soit P le pied de la hauteur du triangle JOM issue de M.



$\widehat{MOP}$ =\widehat{IOJ} - $\widehat{MOH} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

La somme des angles d'un triangle vaut π rad $(180°)$ donc dans le triangle OHM rectangle en H, on a:

$\widehat{PMO} + \widehat{MOP} + \widehat{OPM} = \pi$

$\widehat{PMO} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \pi$

$\widehat{PMO} + \frac{3\pi}{4} = \pi$

$\widehat{PMO} = \pi - \frac{3\pi}{4}$

$\widehat{PMO} = \frac{3\pi}{4}$ Ainsi $\widehat{PMO} = \widehat{MOP}$

Le triangle MOP est donc un triangle rectangle isocèle en P. On a donc $PO = PM$. Dans le triangle MOP rectangle en P, on applique le théorème de Pythagore:

$OM^2 = OP^2 + PM^2$

$1^2 = 2OP^2$

$\frac{1}{2} = OP^2$

$OP = \sqrt{\frac{1}{2}}$

$OP = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{2}}$

$OP = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$OP = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^2}$

$OP = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ainsi $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Remarque: on a aussi: $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

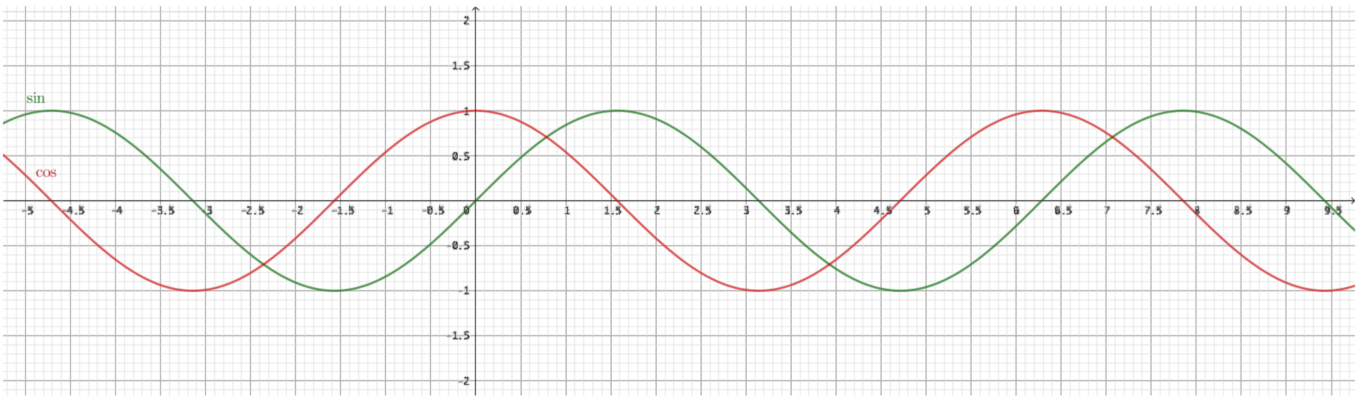
Valeurs remarquables

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

III. Fonctions trigonométriques

Définition 5

La fonction sinus, notée $\sin$, est la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \sin(x)$.
La fonction cosinus, notée $\cos$, est la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto \cos(x)$. Leurs courbes représentatives sont appelées sinusoïdes.



Défintion 6

Une fonction trigonométrique f définie sur $\mathbb{R}$ est **périodique de période** T si et seulement si $\forall x \in \mathbb{R}, f(x+T) = f(x)$.

Propriété 4

On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x+2\pi) = \sin(x)$ et $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$. Donc les fonctions $\sin$ et $\cos$ sont périodiques de période 2π.
On dit qu'elles sont 2π-périodiques.
Leurs courbes représentatives se « répètent » tous les 2π.

Propriété 5

On a vu que :

- $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$. On dit que la fonction $\sin$ est impaire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- $\cos(-x) = \cos(x)$. On dit que la fonction $\cos$ est paire. Sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.