Les suites

I - un peu d'histoire

Bien avant de faire l'objet d'une étude formalisée, les suites apparaissent dans deux types de situations :

- approximation de nombres réels (encadrement de π par Archimède, calcul de la racine carrée chez Héron d'Alexandrie) ;
- problèmes de comptage (les lapins de Fibonacci…).

Les problèmes décrits dans les livres de Fibonacci, ou chez les savants arabes qui le précèdent, se modélisent avec des suites. Oresme calcule des sommes de termes de suites géométriques au XIVe siècle.

II - Généralités

1. Définition

Définition 1

> Une suite numérique u est une fonction pour laquelle la variable n décrit un ensemble D qui est soit $\mathbb{N}$, soit une partie de $\mathbb{N}$ (souvent $\mathbb{N}^*$).
> On a donc $u : n \in D \mapsto u(n) \in \mathbb{R}$.
> Le réel $u(n)$ se note aussi u_n .
> Une suite se présente comme une liste finie ou infinie de nombres numérotés.
> Le terme initial est u_0 (ou u_1). Le terme général est u_n .
> La suite de terme général u_n est notée u, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u(n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1 :

Soit la liste ordonnée suivante : $3,7 - 4,2 \; - \; 7,3 - 4,9 - 6,5$.
Si on considère que le terme initial est u_0 alors on a :

> - $u_0 = 3,7$
> - $u_1 = 4,2$
> - $u_2 = 7,3$
> - $u_3 = 4,9$
> - $u_4 = 6,5$
>   Cette suite est finie.

Exemple 2 :

Soit la liste ordonnée des nombres pairs : $0 - 2 - 4 - 6 - 8 \; \dots$
Si on considère que le terme initial est u_1 alors on a :

> - $u_1 = 0$
> - $u_2 = 2$
> - $u_3 = 4$
> - $u_4 = 6$
> - $\vdots$ Cette suite est infinie.

Exemple 3 :

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par sa formule explicite: $v_n = n^3 - 3n$.
Calculer v_0, v_1, v_2, v_3 et v_{12}.

> $v_0 = 0^3 - 3 \times 0 = 0$
> $v_1 = 1^3 - 3 \times 1 = -2$
> $v_2 = 2^3 - 3 \times 2 = 2$
> $v_3 = 3^3 - 3 \times 3 = 18$
> $v_12 = (12)^3 - 3 \times 12 = 1692$

Exemple 4 :

Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par une formule de récurrence: $\left\{ \begin{array}{lcl} w_0 & = & 1 \\ w_{n+1} & = & 3w_n - 1 \end{array} \right.$.
Calculer w_0, w_1, w_2, w_3 et w_{12}.

> $w_0 = 1$
> $w_1 = 3 \times w_0 - 1 = 3 \times 1 - 1 = 2$
> $w_2 = 3 \times w_1 - 1 = 3 \times 2 - 1 = 5$
> $w_3 = 3 \times w_2 - 1 = 3 \times 5 - 1 = 14$
> Pour calculer w_{12} il faut calculer w_{11} et ainsi de suite donc on est obligé de calculer tous les termes de w_4 à w_{12}.
> $w_4 = 3 \times w_3 - 1 = 3 \times 14 - 1 = 41$
> $w_5 = 3 \times w_4 - 1 = 3 \times 41 - 1 = 122$
> $w_6 = 3 \times w_5 - 1 = 3 \times 122 - 1 = 365$
> $w_7 = 3 \times w_6 - 1 = 3 \times 365 - 1 = 1094$
> $w_8 = 3 \times w_7 - 1 = 3 \times 1094 - 1 = 3281$
> $w_9 = 3 \times w_8 - 1 = 3 \times 3281 - 1 = 9842$
> $w_{10} = 3 \times w_9 - 1 = 3 \times 9842 - 1 = 29525$
> $w_{11} = 3 \times w_{10} - 1 = 3 \times 29525 - 1 = 88574$
> $w_{12} = 3 \times w_{11} - 1 = 3 \times 88574 - 1 = 265721$

Exemple 5:

Que fait l'algorithme suivant?

$c \leftarrow 1$
Afficher c Tant que $c > 0,01$ faire:
    $c \leftarrow c/2$
    Afficher c
Fin Tant que

> Cet algorithme affiche les premiers termes de la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} c_0 & = & 1 \\ c_{n+1} & = & \frac{c_n}{2} \end{cases}$ tant qu'ils sont supérieurs ou égaux à $0,01$, c'est-à-dire:
>
> - $c_0 = 1$
> - $c_1 = 0,5$
> - $c_2 = 0,25$
> - $c_3 = 0,125$
> - $c_4 = 0,0625$
> - $c_5 = 0,03125$
> - $c_6 = 0,015625$
> - $c_7 = 0,0078125$

2. Représentation graphique

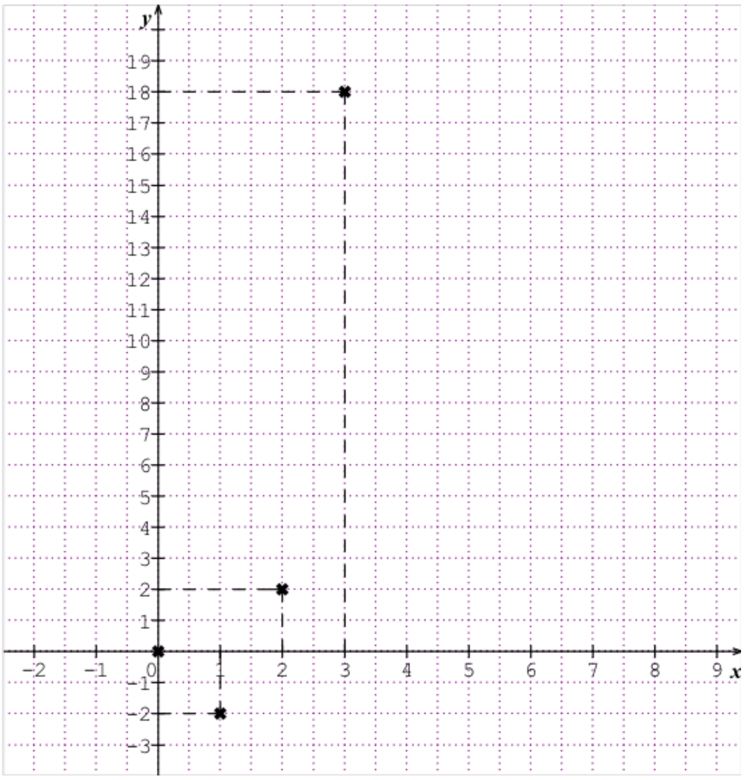
Définition 2

> Dans un repère orthogonal, la représentation graphique d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée des points de coordonnées $(n; u_n)$.

Exemple 6:

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = n^3 - 3n$. Tracer la représentation graphique de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

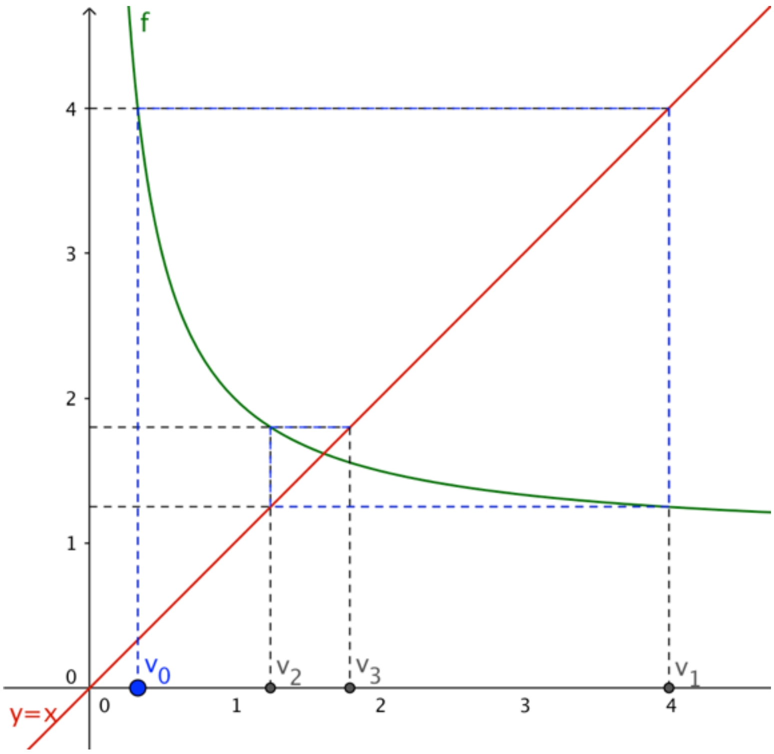
> On a vu que:
>
> - $v_0 = 0^3 - 3 \times 0 = 0$
> - $v_1 = 1^3 - 3 \times 1 = -2$
> - $v_2 = 2^3 - 3 \times 2 = 2$
> - $v_3 = 3^3 - 3 \times 3 = 18$
> - $v_12 = (12)^3 - 3 \times 12 = 1692$ On peut donc tracer la représentation graphique ci-dessous:



Exemple 7:

Représenter graphiquement sur l'axe des abscisses les quatre premiers termes de la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} v_0 &= \frac{1}{3} \\ v_{n+1} &= 1 + \frac{1}{v_n} \end{cases}$$



II - Suites arithmétiques

Définition 3

> Soit r un nombre réel fixé. On dit que u est une suite arithmétique de raison r si et seulement si on obtient chaque terme de cette suite en ajoutant r au terme précédent.
> On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque

> $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$.
> Ce qui veut dire que pour obtenir le terme u_{n+1}, on fait $n + 1$ évolutions successives à accroissements constants (l'accroissement vaut toujours r).

Remarque

> Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de calculer quelques termes et de vérifier qu'au moins 2 accroissements entre 2 termes successifs ne sont pas égaux.

Exemple 8:

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_n = 1 + 2^{-n}$.

1. Calculer $u0$, u_1 et u_2.
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle arithmétique?

> 1. $u_0 = 1 + 2^{-0} = 1 + 1 = 2$
> $u_1 = 1 + 2^{-1} = 1 + 0,5 = 1,5$
> $u_2 = 1 + 2^{-2} = 1 + 0,25 = 1,25$
> 2. $u_1 - u_0 = 1,5 - 2 = -0,5$
> $u_2 - u_1 = 1,25 - 1,5 = -0,25$
>   Donc $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.
>   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est donc pas arithmétique.

Propriété 1

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
> $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}, u_n = u_p + (n - p)r$
> En particulier $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + n \times r$

Démonstration

> D'après la définition d'une suite arithmétique de raison r, pour passer d'un terme au suivant, on ajoute r.
> Donc $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} = u_k + r$ ou encore $\forall k \in \mathbb{N}, u_{k+1} - u_k = r$ Donc:
>
> - $u_n - u_{n-1} = r$
> - $u_{n-1} - u_{n-2} = r$
> - $\vdots$
> - $u_2 - u_1 = r$
> - $u_1 - u_0 = r$
>   Donc la somme des termes de gauche est égale à la somme des termes de droite. $(u_n - u_{n-1}) + (u_{n-1} - u_{n-2}) + \ldots + (u_2 - u_1) + (u_1 - u_0) = \underbrace{r + r + \ldots + r + r}_{n\,fois}$
>
> $u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + \ldots + u_2 - u_1 + u_1 - u_0 = n \times r$
> $u_n - u_0 = nr$
> $u_n = u_0 + nr$
>   Ce qui amène le résultat du cas particulier.
>   On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = u_0 + nr$ Soit $p \in \mathbb{N}$. On a donc $u_p = u_0 + pr$.
>   Et donc $u_n - u_p = (u_0 + nr) - (u_0 + pr)$
> $u_n - u_p = u_0 + nr - u_0 - pr$
> $u_n - u_p = nr - pr$
> $u_n - u_p = (n - p)r$
> $u_n = u_p + (n - p)r$

Remarque

> Pour démontrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique, trois méthodes sont possibles :
>
> - Démontrer que $\exists r \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. Si tel est le cas alors r est la raison de la suite arithmétique.
> - Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n. Si tel est le cas alors le nombre trouvé est la raison de la suite arithmétique.
> - Démontrer que $\exists r \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}, u_n = a + nr$. Si tel est le cas alors r est la raison de la suite arithmétique (et $u_0 = a$, si u_0 existe).

Exemple 8:

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ 3u_{n+1} & = & 3u_n + 5 \end{cases}$

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. Vous donnerez le premier terme et la raison.
2. Exprimer u_n en function de n.
3. Calculer u_9.

> > 1. $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+1} = 3u_n + 5$

> $\forall n \in \mathbb{N}, 3u_{n+1} - 3u_n = 5$
> $\forall n \in \mathbb{N}, 3(u_{n+1} - u_n) = 5$
> $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{5}{3}$ Ce dernier résultat ne dépend pas de n, donc la suite est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{5}{3}$.
>
> 2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $\frac{5}{3}$ donc:
> $u_n = u_0 + n \times \frac{5}{3}$
> $u_n = 2 + \frac{5n}{3}$
> 3. $u_9 = 2 + \frac{5\times 9}{3} = 17$

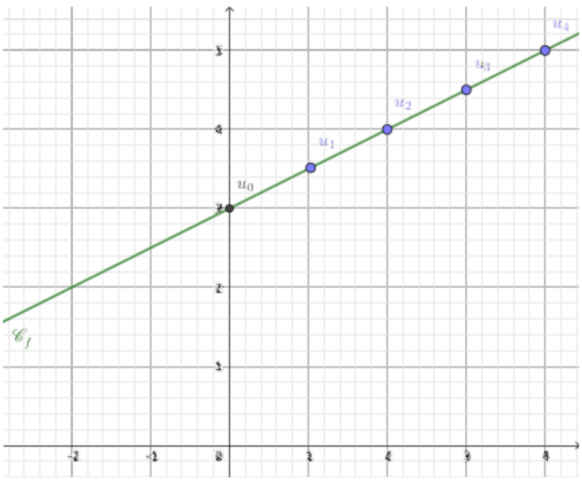
Exemple 9:

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{7+2n}{5}$.

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique. Vous donnerez le premier terme et la raison.
2. Exprimer v_n en function de n.
3. Calculer v_{19}.

> 1. $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{7+2n}{5}$
> Donc $v_{n+1} = \frac{7+2(n+1)}{5} = \frac{7+2n+2}{5} = \frac{9+2n}{5}$
> Ainsi $v_{n+1} - v_n = \frac{9+2n}{5} - \frac{7+2n}{5} = \frac{(9+2n)-(7+2n)}{5} = \frac{9+2n-7-2n}{5} = \frac{2}{5}$
> Ce dernier résultat ne dépend pas de n, donc la suite est arithmétique de premier terme $v_0 = \frac{7+2\times 0}{5} = \frac{7}{5}$ et de raison $\frac{2}{5}$.
> 2. Comme la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $v_0 = \frac{7+2\times 0}{5} = \frac{7}{5}$ et de raison $\frac{2}{5}$, on a:
> $v_n = \frac{7}{5} + n \times \frac{2}{5}$
> 3. $v_{19} = \frac{7}{5} + 19 \times \frac{2}{5} = \frac{45}{5} = 9$

Représentation graphique

> La représentation graphique d'une suite arithmétique de raison r est un ensemble de points alignés. La droite passant par tous ces points est la représentation de la fonction affine définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = u_0 + rx$.
>
> 
>

Propriété 2

> $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Démonstration

> Posons $S_n = 1 + 2 + \cdots + (n-1) + n$.
> On a aussi $S_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1$
> Et donc:
> $S_n + S_n = (1+n) + 2 + n - 1) + \ldots + (n - 1 + 2) + (n+1)$
> $2S_n = \underbrace{(n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1) + (n+1)}_{n\ fois}$
> $2S_n = n \times (n+1)$
> $2S_n = n(n+1)$
> $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$

Exemple 10:

Calculer $1 + 2 + 3 + \cdots + 100$, la somme des 100 premiers nombres entiers naturels strictement positifs.

> $1 + 2 + 3 + \cdots + 100 = \frac{100(100+1)}{2} = \frac{100\times 101}{2} = 50 \times 101 = 5050$

Remarque

> On pourrait démontrer que la somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est donnée par la formule:
> $\frac{(1^{er}\ terme\ de\ la\ somme + d^{er}\ terme\ de\ la\ somme)\times nb\ termes\ dans\ la\ somme}{2}$

III -Suites géométriques

Définition 4

> Soit q un nombre réel fixé. On dit que v est une suite géométrique de raison q si et seulement si on obtient chaque terme de cette suite en multipliant le terme précédent par q.
> On a donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = q \times v_n$.

Remarque

> $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = q \times v_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_{n+1}}{v_n} = q$.
> On a alors $taux = \frac{v_{n+1} - v_n}{v_n} = \frac{v_{n+1}}{v_n} - \frac{v_n}{v_n} = q - 1$.
> Ce qui veut dire que pour obtenir le terme v_{n+1}, on fait $n + 1$ évolutions successives à taux constants (le taux vaut toujours $q - 1$).

Propriété 3

> Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q.
> $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2, v_n = v_p \times q^{n-p}$
> En particulier $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$

Démonstration

> D'après la définition d'une suite géométrique de raison q, pour passer d'un terme au suivant, on multiplie par q.
> Donc $\forall k \in \mathbb{N}, v_{k+1} = v_k \times q$ ou encore $\forall k \in \mathbb{N}, \frac{v_{k+1}}{v_k} = q$ Donc:
>
> - $\frac{v_n}{v_{n-1}} = q$
> - $\frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} = q$
> - $\vdots$
> - $\frac{v_2}{v_1} = q$
> - $\frac{v_1}{v_0} = q$
>
> Donc le produit des termes de gauche est égale au produit des termes de droite. $\frac{v_n}{v_{n-1}} \times \frac{v_{n-1}}{v_{n-2}} \times \ldots \times \frac{v_2}{v_1} \times \frac{v_1}{v_0} = \underbrace{q \times q \times \ldots \times q \times q}_{n\,fois}$
>
> $\frac{v_n \times v_{n-1} \times \ldots \times v_2 \times v_1}{v_{n-1} \times v_{n-2} \times \ldots \times v_1 \times v_0} = q^n$
> $\frac{v_n}{v_0} = q^n$
> $v_n = v_0 \times q^n$
> Ce qui amène le résultat du cas particulier.
> On a $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$.
> Soit $p \in \mathbb{N}$. On a donc $v_p = v_0 \times q^p$.
> Et donc $\frac{v_n}{v_p} = \frac{v_0 \times q^n}{v_0 \times q^p}$
> $\frac{v_n}{v_p} = \frac{q^n}{q^p}$
> $\frac{v_n}{v_p} = q^{n-p}$
> $v_n = v_p \times q^{n-p}$

Remarque

> Pour démontrer qu'une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, trois méthodes sont possibles :
>
> - Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{v_(n+1)}{v_n}$ ne dépend pas de n. Si tel est le cas alors le nombre trouvé est la raison de la suite géométrique.
> - Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0 \times q^n$.
> - Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = v_n \times q$.

Exemple 11:

Soit la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $\begin{cases} v_1 = 1 \\ v_{n+1} = 0,3v_n, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. Vous donnerez le permier terme et la raison.
2. Déterminer v_n en fonction de n.
3. Calculer v_5.

> > 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = 0,3v_n$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{v_{n+1}}{v_n} = 0,3$.
> >   Ce dernier résultat ne dépend pas de n donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 0,3 et de premier terme $v_1 = 1$.
> > 2. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 0,3 et de premier terme $v_0 = 1$ donc:

> $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1 \times q^{n-1} = 1 \times 0,3^{n-1} = 0,3^{n-1}$
> 3. $v_5 = 0,3^{5-1} = 0,3^4 = 0,0081$

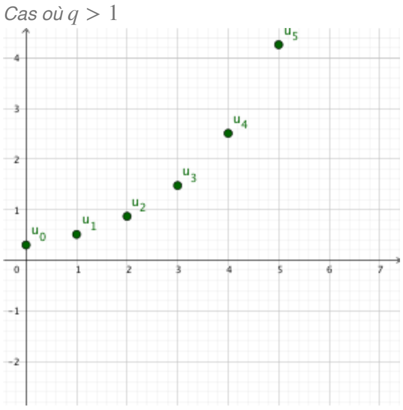
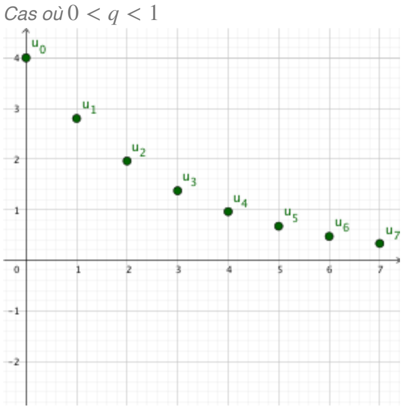
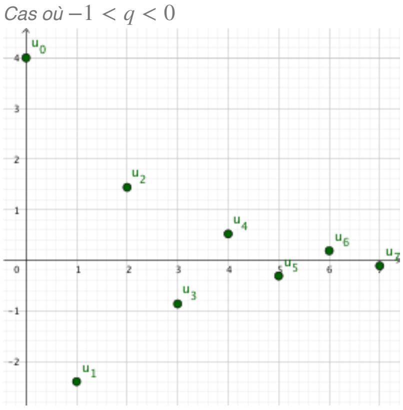
Exemple 12:

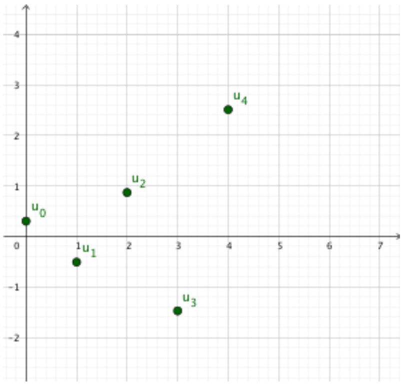
Soit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{5^{n+1}}{3^{n+2}}$.

1. Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. Vous donnerez le permier terme et la raison.
2. Déterminer w_n en fonction de n.
3. Calculer w_4.

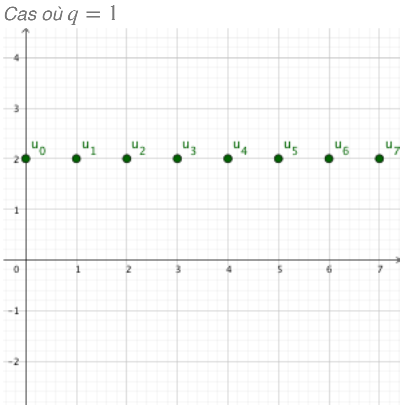
> 1. $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \frac{5^{n+1}}{3^{n+2}}$
> Donc $w_{n+1} = \frac{5^{(n+1)+1}}{3^{(n+1)+2}} = \frac{5^{n+2}}{3^{n+3}}$
> Ainsi $\frac{w_{n+1}}{w_n} = \frac{\frac{5^{n+2}}{3^{n+3}}}{\frac{5^{n+1}}{3^{n+2}}} = \frac{5^{n+2}}{3^{n+3}} \times \frac{3^{n+2}}{5^{n+1}} = 5^{(n+2)-(n+1)} \times 3^{(n+2)-(n+3)} = 5^{n+2-n-1} \times 3^{n+2-n-3} = 5^1 \times 3^{-1} = \frac{5}{3}$
> Ce dernier résultat ne dépend pas de n donc la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{5}{3}$ et de premier terme $w_0 = \frac{5^{0+1}}{3^{0+2}} = \frac{5^1}{3^2} = \frac{5}{9}$.
> 2. $w_n = w_0 \times q^n = \frac{5}{9} \times \left(\frac{5}{3}\right)^n$.
> 3. $w_4 = \frac{5}{9} \times \left(\frac{5}{3}\right)^4 = \frac{5}{9} \times \frac{5^4}{3^4} = \frac{5}{9} \times \frac{625}{81} = \frac{3125}{729}$

Représentation graphique

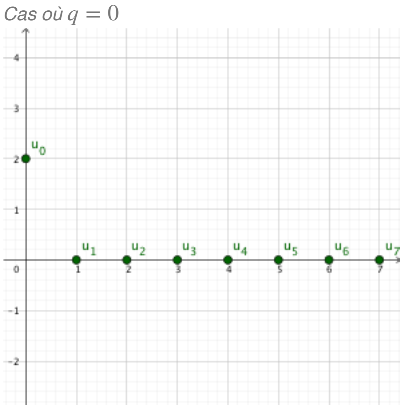
> Pour la représentation graphique d'une suite géométrique v_n de raison q, on parle d'évolution exponentielle.
>
> *Cas où* $q > 1$
>
> 
>
> *Cas où* $0 < q < 1$
>
> 
>
> *Cas où* $-1 < q < 0$
>
> 
>
> *Cas où* $q < -1$



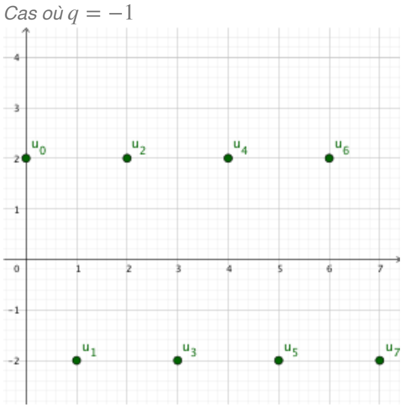
Cas où $q = 1$



Cas où $q = 0$



Cas où $q = -1$



Propriété 4

> Soit $q \in \mathbb{R} - \{1\}$.
> $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=0}^{n-1} q^k = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} = \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$

Démonstration

> Soit $q \in \mathbb{R} - \{1\}$.
> $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}) \times (1 - q) = (1 - q) \times 1 + (1 - q) \times q + (1 - q) \times q^2 + \ldots + (1 - q) \times q^{n-2} + (1 - q) \times q^{n-1} = 1 - q + q - q^2 + q^2 - q^3 + \ldots$
> Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*, (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}) \times (1 - q) = 1 - q^n$

> D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$

Exemple 13:

Calculer $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$.

> > On remarque que $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6 = \frac{1-2^7}{1-2} = \frac{1-128}{-1} = \frac{-127}{-1} = 127$

Remarque

> On pourrait démontrer que la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q est donnée par la formule:
> $1^{er}\ terme\ de\ la\ somme \times \frac{1 - q^{nb\ termes\ dans\ la\ somme}}{1 - q}$