Chapitre IX - fonction exponentielle

I - Un peu d'histoire

La notation exponentielle et les fonctions exponentielles apparaissent vers la fin du $XVII^e$ siècle, procédant d'une volonté de traiter des phénomènes de croissance comparables à ceux des intérêts composés. L'idée étant de combler les trous entre plusieurs puissances d'un même nombre.

La modélisation de ces situations fait naturellement apparaître la caractérisation de la fonction exponentielle comme seule fonction vérifiant l'équation différentielle $y' = y$ et la condition initiale $y(0) = 1$.

Le nombre « e » entre définitivement dans le corpus mathématique, en 1748, dans l'œuvre maîtresse d'Euler Introductio in analysin infinitorum.

II - Généralités

Définition 1
La fonction exponentielle est la seul fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la note exp.

Remarque
On a donc :

- $exp(0) = 1$
- $\forall x \in \mathbb{R}, exp'(x) = exp(x)$

Démonstration (approfondissement)
On admet qu'il existe une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

1. Démontrons que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$ et $f(x) \neq 0$. Posons $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = f(x) \times f(-x)$.
   La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   De plus, on a $h'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times (-1)f(-x) = f(x)f(-x) - (f(x)f(-x) = 0$
   La fonction h est donc une fonction constante puisque sa dérivée est nulle (voir chapitre III).
   Or $h(0) = f(0) \times f(-0) = f(0)^2 = 1^2 = 1$.
   Donc $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \times f(-x) = 1$.
   Ce qui induit que peut importe la valeur de $x, f(x) \neq 0$ sinon, il existerait une valeur de x pour laquelle $f(x) \times f(-x) = 0$, ce qui n'est pas vrai d'après la ligne précédente.

2. Soit g une fonction vérifiant les même propriétés que la fonction f, à savoir: $g' = g$ et $g(0) = 1$. Démontrons que $f = g$.

D'après la démonstration précédente, on a $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq 0$.

On peut donc poser: $\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$.
La fonction k est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a:
$k'(x) = \frac{g'(x)f(x)-g(x)f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{g(x)f(x)-g(x)f(x)}{(f(x))^2} = 0$ car $g'(x) = g(x)$ et $f'(x) = f(x)$, par définition des fonctions f et g.

Ainsi k est une fonction constante.
Or $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$.
Donc $\forall x \in \mathbb{R}, k(x) = 1$.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{g(x)}{f(x)} = 1$ ou encore $\forall x \in \mathbb{R}, g(x)f(x)$.
On a bien $f = g$.

Une fonction qui vérifie $f' = f$ et $f(0) = 1$ est bien unique.

Propriété 1
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, on a:

- $exp(x + y) = exp(x) \times exp(y)$
- $exp(x)exp(-x) = 1$
- $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$
- $exp(x - y) = \frac{exp(x)}{exp(y)}$
- $(exp(x))^n = exp(nx)$

Démonstration (approfondissement)

- Soit $y \in \mathbb{R}$. On définit la fonction f par $f(x) = \frac{1}{exp(y)} \times exp(x + y)$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = \frac{1}{exp(y)} \times exp(x + y) = f(x)$.
  De plus, $f(0) = \frac{1}{exp(y)} \times exp(0 + y) = \frac{1}{exp(y)} \times exp(y) = 1$.
  La fonction f vérifie bien la ***définition 1*** donc il s'agit de la fonction exponentielle.
  Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = exp(x)$.
  On en déduit donc que : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{exp(y)} \times exp(x + y) = exp(x)$ ou encore $exp(x + y) = exp(x) \times exp(y)$.

- voir démonstration de la définition, première partie.

- D'après la démonstration précédente, $exp(x)exp(-x) = 1$ donc $exp(-x) = \frac{1}{exp(x)}$

- $exp(x - y) = exp\,(x + (-y)) = exp(x)exp(-y) = exp(x) \times \frac{1}{exp(y)} = \frac{exp(x)}{exp(y)}$ d'après les démonstrations précédentes.

- $(exp(x))^n = \underbrace{exp(x) \times exp(x) \times \ldots \times exp(x)}_{n\,fois} = exp(\underbrace{x + x + \ldots + x}_{n\,fois}) = exp(nx)$

Exemple

- $exp(x + 2) = exp(x) \times exp(2)$
- $exp(5)exp(-5) = 1$

- $exp(-3) = \frac{1}{exp(3)}$
- $exp(x-2) = \frac{exp(x)}{exp(2)}$
- $(exp(2))^n = exp(n \times 2) = exp(2n)$

Exemple 2

Simplifier les écritures suivantes:

- $exp(3x) \times exp(x) \times 2exp(2x)$
- $\frac{2exp(5x)}{3exp(7x)}$
- $exp(-x) \times \frac{exp(5x)}{exp(-2x)}$
- $(exp(\frac{1}{2}x))^4 \times (exp(-x))^3$

> $exp(3x) \times exp(x) \times 2exp(2x) = 2exp(3x + x + 2x) = 2exp(6x)$
> $\frac{2exp(5x)}{3exp(7x)} = \frac{2}{3}exp(5x - 7x) = \frac{2}{3}exp(-2x)$
> $exp(-x) \times \frac{exp(5x)}{exp(-2x)} = exp(-x + 5x - (-2x)) = exp(4x + 2x) = exp(6x)$
> $(exp(\frac{1}{2}x))^4 \times (exp(-x))^3 = exp(\frac{1}{2}x \times 4) \times exp(-3x) = exp(2x) \times exp(-3x) = exp(2x - 3x) = exp(-x)$

III - Nombre e

Définition 2
Le nombre e est l'image de 1 par la fonction exp.
$exp(1) = e$.

Remarque
On a admet alors $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) = e^x$.

Propriété 2
$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$, on a:

- $e^{x+y} = e^x \times e^y$
- $e^x e^{-x} = 1$
- $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$
- $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$
- $(e^x)^n = e^{nx}$

Exemple

Simplifier les écritures suivantes:

- $e^{3x} \times e^x \times 2e^{2x}$
- $\frac{2e^{5x}}{3e^{7x}}$
- $e^{-x} \times \frac{e^{5x}}{e^{-2x}}$
- $\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)^4 \times \left(e^{-x}\right)^3$

> $e^{3x} \times e^{x} \times 2e^{2x} = 2e^{3x+x+2x} = 2e^{6x}$
> $\frac{2e^{5x}}{3e^{7x}} = \frac{2}{3}e^{5x-7x} = \frac{2}{3}e^{-2x}$
> $e^{-x} \times \frac{e^{5x}}{e^{-2x}} = e^{-x+5x-(-2x)} = e^{4x+2x} = e^{6x}$
> $\left(e^{\frac{1}{2}x}\right)^4 \times \left(e^{-x}\right)^3 = e^{\frac{1}{2}x\times 4} \times e^{-3x} = e^{2x} \times e^{-3x} = e^{2x-3x} = e^{-x}$

IV - Propriétés analytique

Propriété 4
$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$

Démonstration (approfondissement)
On a vu que $\forall x \in \mathbb{R}, exp(x) \neq 0$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, e^x \neq 0$.

On peut donc écrire:
$e^x = e^{\frac{x}{2}\times 2} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$ d'après la ***propriété 2*** $(e^x)^n = e^{nx}$ avec $n = 2$.
Or un carré est toujours positif.
Donc $e^x > 0$.

Propriété 5
La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Démonstration (approfondissement)
La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, exp'(x) = exp(x) = e^x$.
Or d'après la propriété précedente, $e^x > 0$.
Donc $exp'(x) > 0$.
Ainsi la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

Remarque
La fonction exponentielle étant strictement croissante, on peut en déduire la propriété suivante:
Soient $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a:
$e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$

Propriété 6
$\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$

Démonstration (approfondissement)
D'une part, $\sqrt{e}^2 = e$, d'autre part, $\left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2 = e^{\frac{1}{2}\times 2} = e^1 = e$.
Ainsi $\sqrt{e}^2 = \left(e^{\frac{1}{2}}\right)^2$.
Or $\sqrt{e} > 0$ et $e^{\frac{1}{2}} > 0$, donc $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$.

Propriété 7
Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax+b}$.
La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = ae^{ax+b}$.

Démonstration (pas au programme)
Soient $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$. Soit g une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a vu dans le chapitre VI sur la dérivation que la fonction $f : x \mapsto g(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $f'(x) = a \times g'(ax+b)$.

On applique cela à la fonction exponentielle et on obtient le résultat:
$f'(x) = a \times exp'(ax+b) = a\ e^{ax+b}$

Exemple

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -5e^{-2x+3}$.

1. Déterminer $g'(x)$.
2. En déduire le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x puis les variations de g.

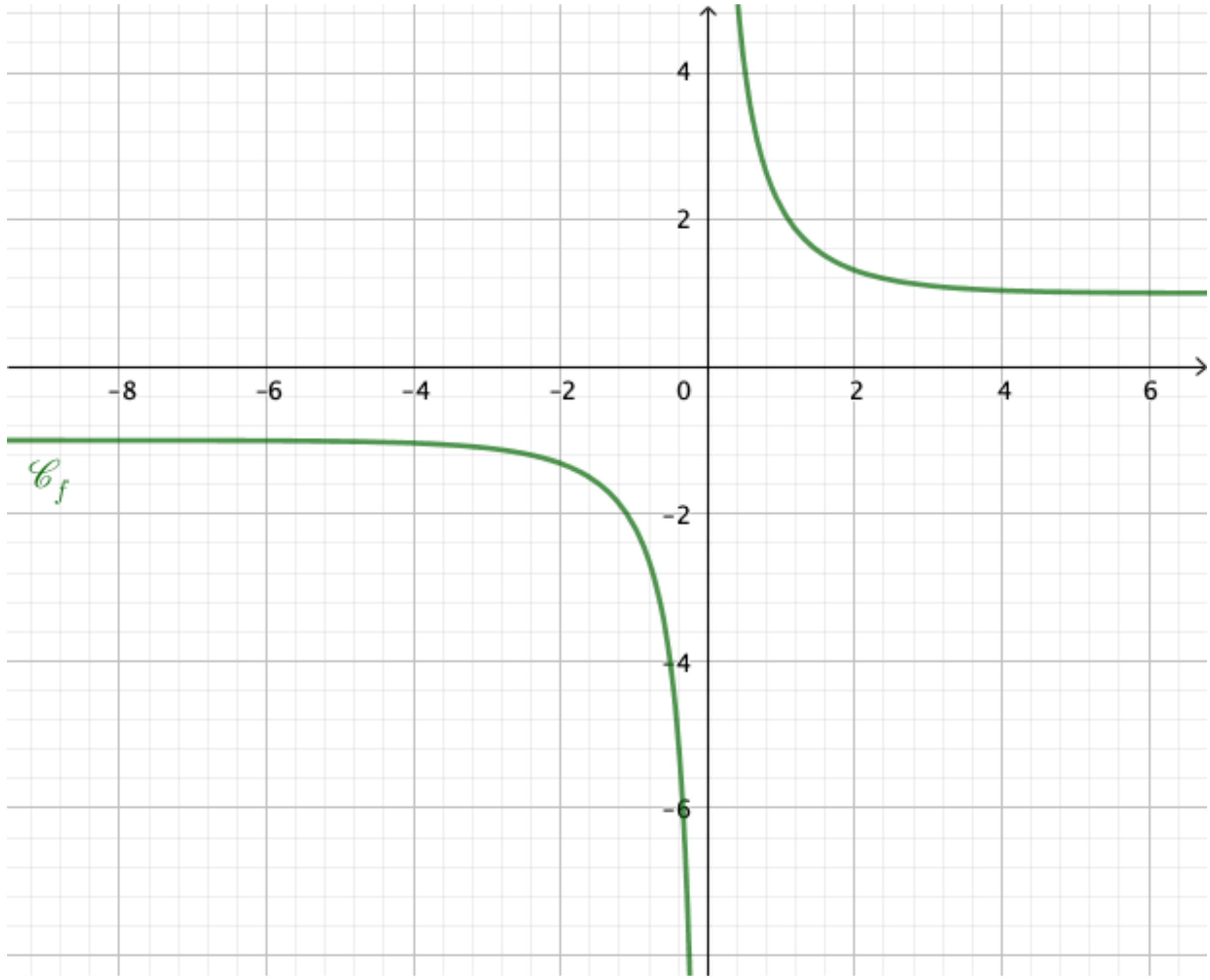
> > 1. g est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -5 \times (-2)e^{-2x+3} = 10e^{-2x+3}$.
> > 2. $10 > 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-2x+3} > 0$ donc $g'(x) > 0$. Ainsi g est croissante sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$.

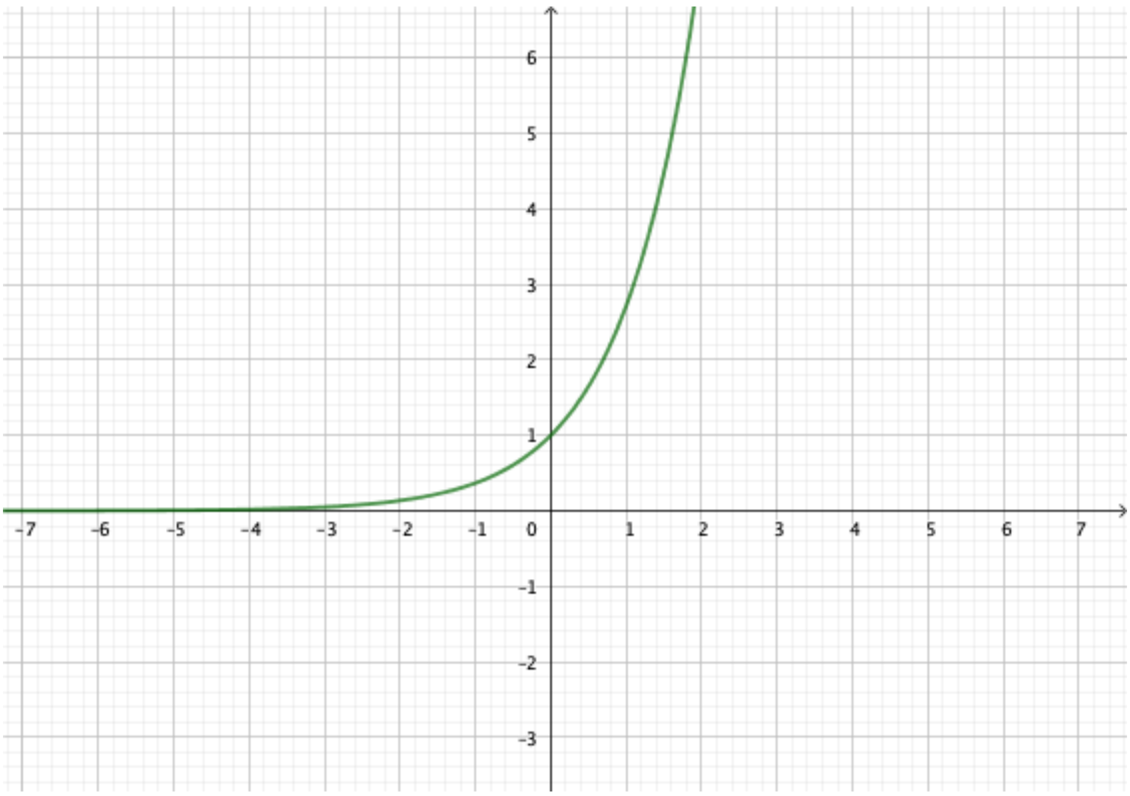
1. Déterminer $f'(x)$.
2. Dresser le tableau de signes de $f'(x)$ et le tableau de variations de f.
3. Tracer $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

> > 1. f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
> > $f'(x) = \frac{e^x(e^x-1)-(e^x+1)e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x((e^x-1)-(e^x+1))}{(e^x-1)^2} = \frac{e^x(e^x-1-e^x-1)}{(e^x-1)^2} = \frac{-2e^x}{(e^x-1)^2}$
> > 2. Voici le tableau de signe et le tableau de variations de f
> >
> > | x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
> > |---|---|---|---|---|---|
> > | -2 | | $-$ | | $-$ | |
> > | e^x | | $+$ | | $+$ | |
> > | $(e^x-1)^2$ | | $+$ | 0 | $+$ | |
> > | $f'(x)$ | | $-$ | $\|$ | $-$ | |
> > | $f(x)$ | | ↘ | $\|$ | ↘ | |
> >
> > 3. Voici la courbe représentative de la fonction f.



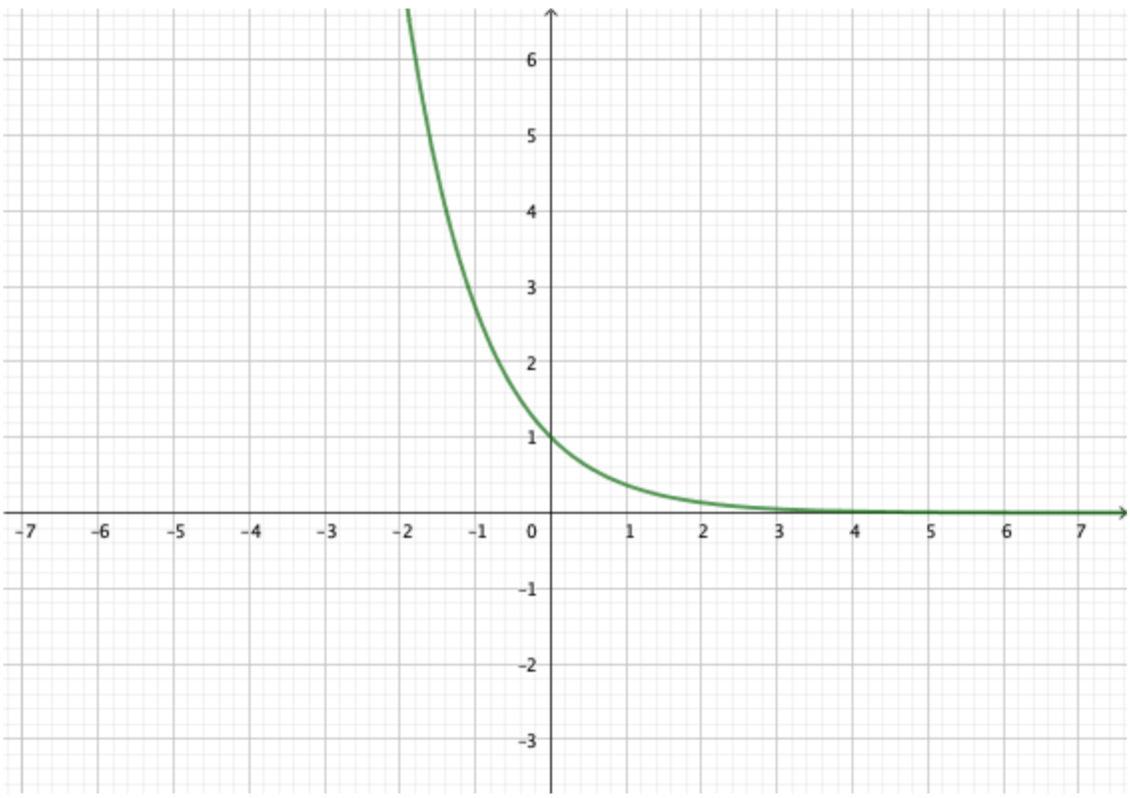
V - Représentation graphique

Représentation de la fonction $x \mapsto e^x$

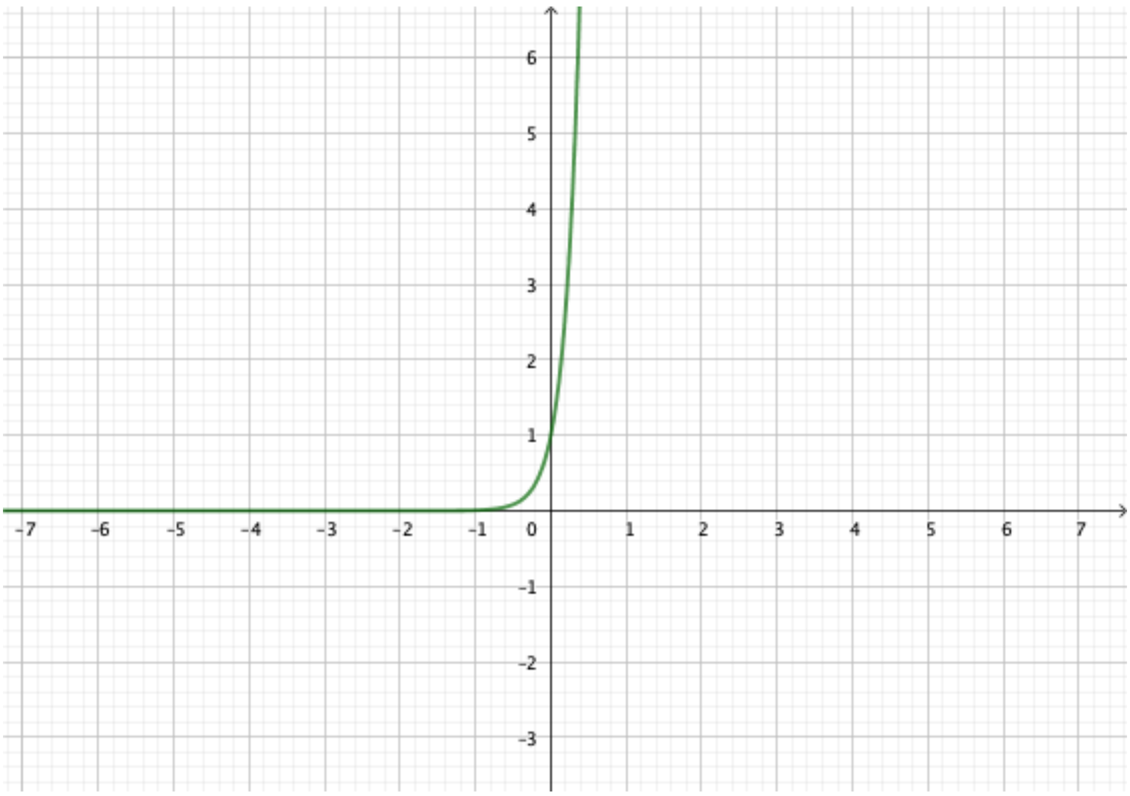


Représentation graphique de fonctions du type $x \mapsto e^{kx}$ ou $x \mapsto e^{-kx}$ avec $k \in \mathbb{R}_+^*$

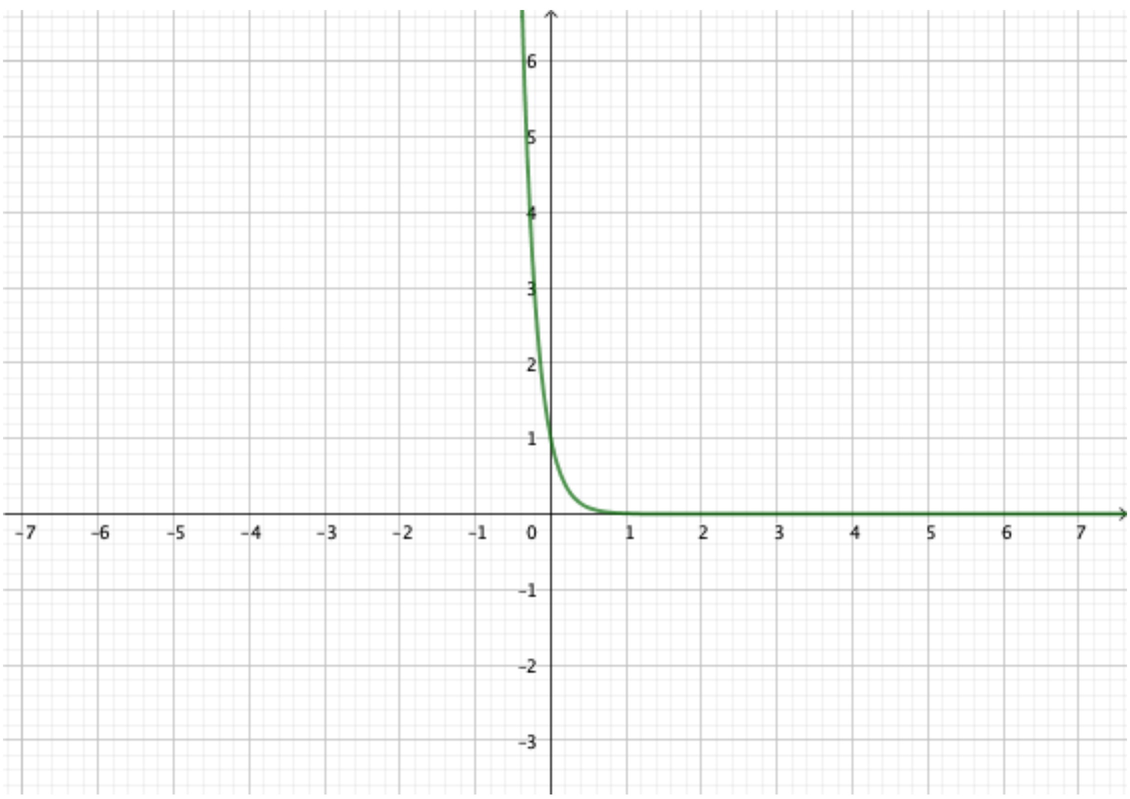
Représentation de la fonction $x \mapsto e^{-x}$



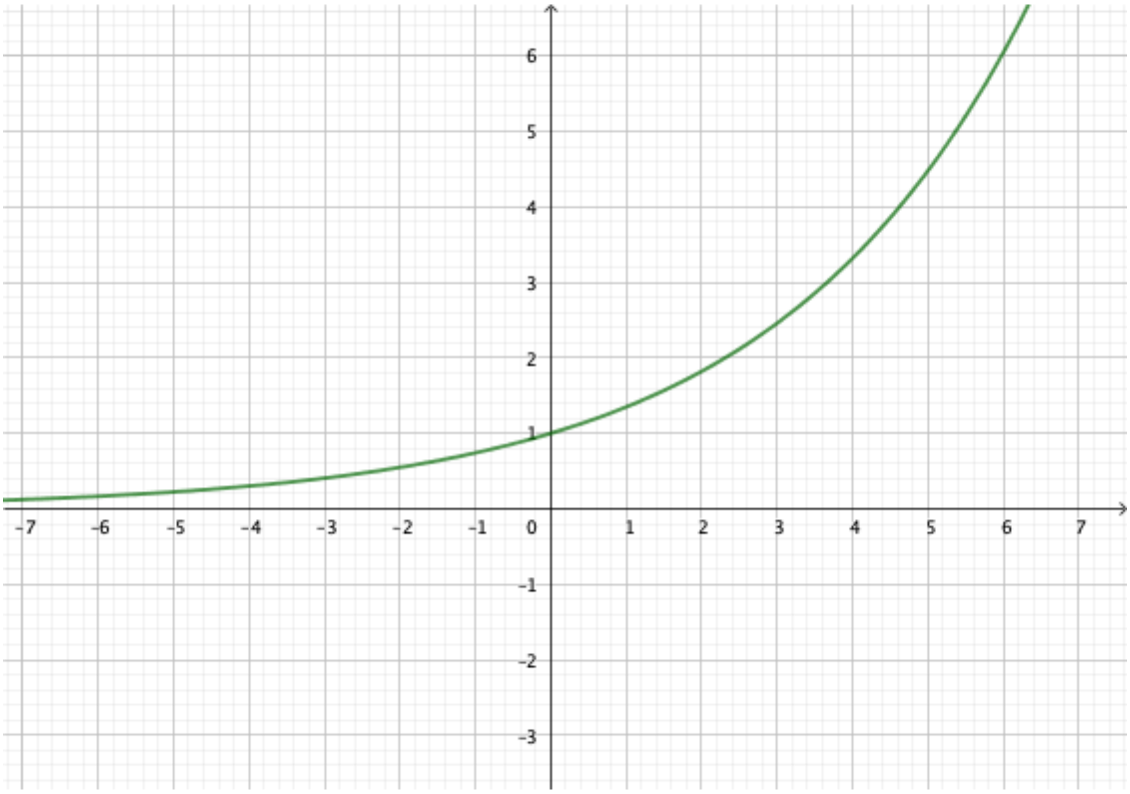
Représentation de la fonction $x \mapsto e^{5x}$



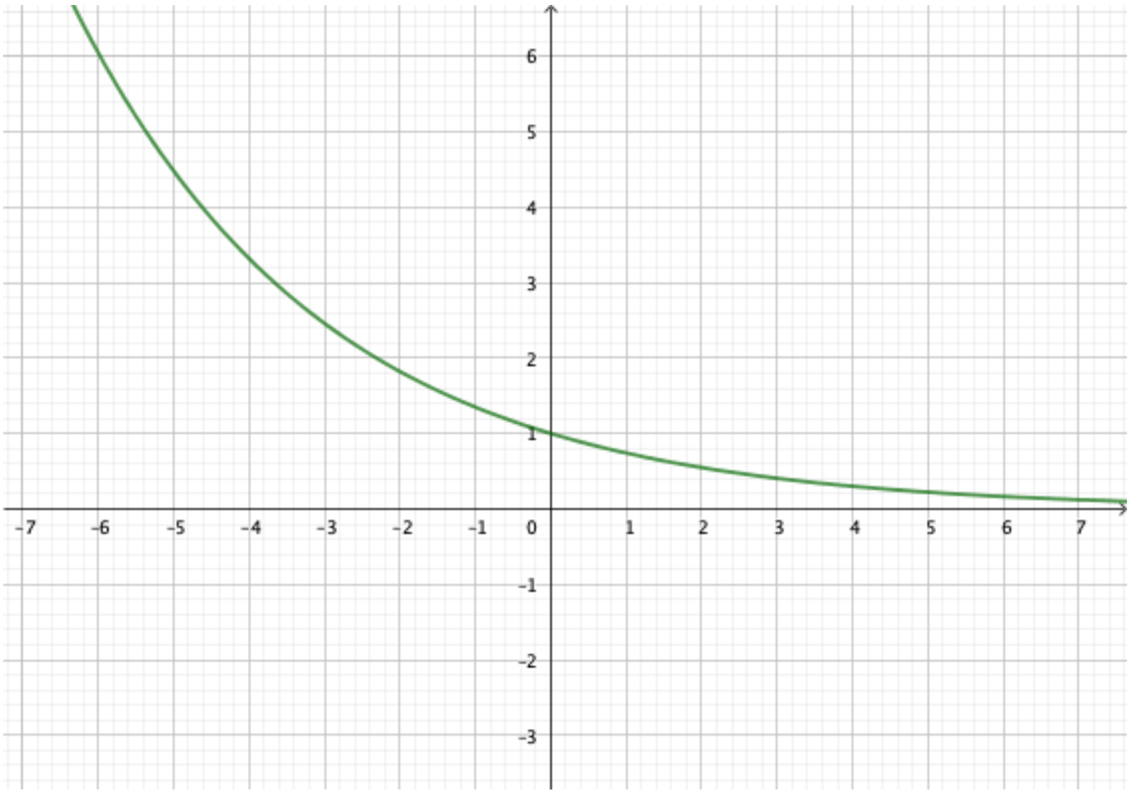
Représentation de la fonction $x \mapsto e^{-5x}$



Représentation de la fonction $x \mapsto e^{0,3x}$



Représentation de la fonction $x \mapsto e^{-0,3x}$



Remarque Soit $k \in \mathbb{R}_+^*$. Les représentations graphiques des fonctions $x \mapsto e^{kx}$ ou $x \mapsto e^{-kx}$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

VI - Un problème

Alcoolémie Le taux d'alcoolémie d'une personne est la quantité d'alcool dans le sang en g/L. Après la consommation d'une certaine quantité d'alcool, le taux d'alcoolémie peut être modélisé par une fonction du type: $f(t) = kte^{-t}$ où le coefficient k dépend de la quantité d'alcool ingérée et où t est le temps exprimé en heures. Nous prendrons ici $k = 3$ et $t \in [0; 12]$.

1. Quel est le taux d'alcoolémie de la personne considérée au début de l'expérience, c'est-à-dire à $t = 0$?
2. Démontrer que $f'(t) = 3(1-t)e^{-t}$ pour $t \in [0; 12]$.
3. a. Etudier les variations de la fonction f et en déduire à quel moment le taux d'alcoolémie atteint son maximum.
   b. Donner une valeur approchée à 0,001 près de ce maximum et du taux d'alcoolémie à $t = 12\ h$.
4. En France, en 2019, le Code de la route interdit toute conduite d'un véhicule lorsque le taux d'alcoolémie est supérieur ou égal à 0,5 g/L. Rédiger un algorithme Python permettant de déterminer une valeur approchée à 5 minutes près du temps que cette personne doit attendre pour pouvoir prendre le volant et indiquer la réponse obtenue.

1. $f(0) = 3 \times 0 \times e^{-0} = 0$
   Le taux d'alcoolémie au début de l'expérience est de 0g/L.
2. En posant $u(t) = 3t$ et $v(t) = e^{-t}$, on a $f(t) = u(t) \times v(t)$. On en déduit que:
   $f'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) = 3 \times e^{-t} + 3t \times (-1)e^{-t} = 3 \times e^{-t} - 3t \times e^{-t} = (3-3t)e^{-t} = 3(1-t)e^{-t}$
3. a. On peut établir le tableau de signes de $f'(t)$ puis les variations de f.

x	0		1		12
3		$+$		$+$	
$1-t$		$+$	0	$-$	
e^{-t}		$+$		$+$	
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$f(1)$	$\searrow$	$f(12)$

   Le taux d'alcoolémie atteint son maximum au bout de 1 h.
   b. $f(1) = 3 \times 1 \times e^{-1} = 3e^{-1} \approx 1,104$
   Au bout d'1 heure, le taux d'alccolémie est d'environ 1,104 g/L.
   $f(12) = 3 \times 12 \times e^{-12} = 36e^{-12} \approx 0,000$
   Au bout de 12 heures, le taux d'alccolémie est d'environ 0,000 g/L.

4. Voici un algorithme Python répondant à ce problème:

```python
from math import exp
def alcoolemie(t):
 return 3*t*exp(-t)
def transforme(temps):
 heures=int(temps)
 minutes=int((temps-heures)*60)
 return str(heures) + " heures " + str(minutes) + " minutes"

def recherche():
 """
 Remarque on commence à t=1 car on sait que le maximum est atteint pour t=1
 et que le taux d'alcoolémie est décroissant avec le temps
 """
 temps=1
 alc=alcoolemie(temps)
 while alc>0.25:
     temps = temps + 5/60
     alc=alcoolemie(temps)
 print(transforme(temps))
```

La réponse est est la suivante:

```
>>> recherche()
3 heures 50 minutes
```