Chapitre I – Polynômes du second degré

I. Un peu d'histoire

On trouve chez Diophante d'Alexandrie, puis chez Al-Khwârizmî(780-850)(voir aussi Al-Khwârizmî), des méthodes de résolutions d’équations du second degré. Al-Khwârizmî est connu comme le père de l'algèbre.

II. Fonction polynôme du second degré

Définition

> La fonction f est une **fonction polynôme du second degré** lorsqu'il existe trois nombres réels a, b et c avec $a \neq 0$ tels que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = ax^2 + bx + c$.

Exemple:

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles sont des fonctions polynômes du second degré?
$f : x \mapsto 3x^2 + 2x - 5$
$g : x \mapsto -2x^2 + 3x - 7$
$h : x \mapsto x(2x - 3)$
$i : x \mapsto \frac{1}{x}$
$j : x \mapsto \frac{3x^2+2x-5}{2x^2-7x+1}$
$k : x \mapsto x^3 + 6x - 1$
$l : x \mapsto x^2 - 3x$

> > Les fonctions f, g, h et l sont des fonctions polynômes du second degré.

III. Forme canonique

1. Propriété

> Toute fonction polynôme P du second degré de la forme $ax^2 + bx + c$ où a, b, et c sont trois nombres réells avec $a \neq 0$, peut s'écrire sous la forme $a(x - \alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.
> Cette forme est appelée forme canonique du polynôme P.

Exemple:

Mettre sous forme canonique le polynôme du second degré $P(x) = -2x^2 + 3x - 7$.

> > $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{3}{2\times(-2)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$
> > $\beta = P(\alpha) = -2\alpha^2 + 3\alpha - 7 = -2\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{3}{4}\right) - 7 = -2 \times \frac{9}{16} + \frac{9}{4} - 7 = -\frac{9}{8} + \frac{18}{8} - \frac{56}{8} = -\frac{47}{8}$
> > Donc $P(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{47}{8}\right) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{47}{8}$

2. Variations et extremum de la fonction $P : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$

> Une fonction polynôme du second degré $P : x \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$ admet un extremum:
>
> - Si $a > 0$, alors P admet un minimum égal à β et atteint pour $x = \alpha$. De plus P est décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$.
> - Si $a < 0$, alors P admet un maximum égal à β et atteint pour $x = \alpha$. De plus P est croissante sur $]-\infty; \alpha]$ et décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.
>
> On a donc le tableau de variation suivant:
> Si $a > 0$:
>
> | **x** | $-\infty$ | | α | | $+\infty$ |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $f(x)$ | | ↘ | β | ↗ | |
>
> si $a < 0$:
>
> | **x** | $-\infty$ | | α | | $+\infty$ |
> |---|---|---|---|---|---|
> | $f(x)$ | | ↗ | β | ↘ | |

Exemple:

Déterminer l'extremum local de la fonction P définie sur $\mathbb{R}$ par $P(x) = -2x^2 + 3x - 7$.

> > P est une fonction polynôme du second degré.
> > Et on a vu précédemment que $P(x) = -2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(-\frac{47}{8}\right)$.

> > Donc P admet un maximum qui vaut $-\frac{47}{8}$ et qui est atteint pour $x=\frac{3}{4}$.

3. Courbe représentative

> La courbe représentative d'uen fonction P polynôme du second degré définie par $P(x)=a x^{2}+b x+c$ est une parabole d'équation $y=a x^{2}+b x+c$.
> Elle possède un axe de symétrie d'équation $x=\alpha$ où $\alpha=\frac{-b}{2 a}$.

IV. Forme factorisée

1. Discriminant du polynôme du second degré $a x^{2}+b x+c$

> On appelle **discriminant** du polynôme $a x^{2}+b x+c$ le nombre $\Delta=b^{2}-4 a c$.

Exemple:

Déterminer le discriminant du polynôme du second degré $-2 x^{2}+3 x-7$.

> > $\Delta=b^{2}-4 a c=3^{2}-4 \times(-2) \times(-7)=-47$

2. Factorisation du polynôme du second degré $a x^{2}+b x+c$

> Considérons le polynôme P du second degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)=a x^{2}+b x+c$ où a, b, et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$. Soit Δ son discriminant.
> Si $\Delta<0$ alors le polynôme P n'a pas de racine et P n'est pas factorisable.
> Si $\Delta=0$ alors le polynôme P a une racine double $x_{0}=\frac{-b}{2 a}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)=a\left(x-x_{0}\right)^{2}$
> Si $\Delta>0$ alors le polynôme P a deux racines $x_{1}=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2 a}$ et $x_{2}=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2 a}$. De plus, $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x)=a\left(x-x_{1}\right)\left(x-x_{2}\right)$

Remarque:

> Considérons le polynôme P du second degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x)=a x^{2}+b x+c$ où a, b, et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$.
> On appelle racine du polynôme P les nombres réels annulateurs du polynôme P, c'est-à-dire les nombres x_{i} tels que $P\left(x_{i}\right)=0$.
> Les racines du polynôme P sont donc aussi les solutions de l'équation $a x^{2}+b x+c=0$.
> Donc trouver les solutions de l'équation $a x^{2}+b x+c=0$, c'est trouver les racines du polynôme $a x^{2}+b x+c$.

Démonstration:

> Rappel:
> L'équation $X^2 = \lambda$ admet :
>
> - 0 solution si $\lambda < 0$.
> - 1 solution si $\lambda = 0$. Cette solution est le nombre $X = 0$.
> - 2 solutions si $\lambda > 0$. Ces deux solutions sont $X = \sqrt{\lambda}$ et $X = -\sqrt{\lambda}$.
>
> Résolvons alors $ax^2 + bx + c = 0$ où a, b, et c sont trois nombres réells avec $a \neq 0$. La forme canonique du polynôme du second degré, membre de gauche de l'équation ci-dessus, est
> $a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\frac{b}{2a}$ et $\beta = P(\alpha) = -\frac{b^2-4ac}{4a}$.
> Il faut donc résoudre $a(x-\alpha)^2 + \beta = 0$
> ou encore $a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a} = 0$
> soit $a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a}$ c'est-à-dire $a\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 = \frac{\Delta}{4a}$
> Ou enfin $\left(x - \left(-\frac{b}{2a}\right)\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$
> Soit $X^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ en posant $X = x - \left(-\frac{b}{2a}\right)$
>
> - <u>1er cas:</u> $\Delta < 0$
>   donc $\frac{\Delta}{4a^2} < 0$
>   Ainsi $X^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ n'admet pas de solution.
>   Et donc $ax^2 + bx + c = 0$ n'admet pas de solution.
> - <u>2ème cas:</u> $\Delta = 0$
>   donc il faut résoudre $X^2 = 0$ qui admet une seule solution $X = 0$.
>   Ainsi $x - \left(-\frac{b}{2a}\right) = 0$
>   C'est-à-dire $x = -\frac{b}{2a}$
> - <u>3ème cas:</u> $\Delta > 0$
>   donc $\frac{\Delta}{4a^2} > 0$
>   Ainsi $X^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$ admet deux solutions $X_1 = \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$ et $X_2 = -\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}$
>   ou encore $X_1 = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $X_2 = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$
>   Il faut donc résoudre $x - \left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x - \left(-\frac{b}{2a}\right) = -\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$
>   Ce qui nous amène à deux solutions:
> $x_1 = \left(-\frac{b}{2a}\right) + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \left(-\frac{b}{2a}\right) - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}$
>   ou encore $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$

Exemple:

Factoriser si possible les polynômes définis $\forall x \in \mathbb{R}$ par $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$, $Q(x) = 3x^2 + 6x + 3$ et $R(x) = -2x^2 + 3x - 7$.

> > <u>Pour le polynôme P:</u>
> > $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1$
> > $\Delta > 0$ donc le polynôme P admet deux racines:

> > $x_1 = \frac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ et $x_1 = \frac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times2} = \frac{4}{4} = 1$
> > Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x-1)$
> >
> > Pour le polynôme Q:
> > $\Delta = 6^2 - 4\times3\times3 = 0$
> > $\Delta = 0$ donc le polynôme Q admet une racine double:
> > $x_0 = \frac{-6}{2\times3} = \frac{-6}{6} = -1$
> > Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) = 3(x-(-1))^2 = 3(x+1)^2$
> >
> > Pour le polynôme R:
> > $\Delta = 3^2 - 4\times(-2)\times(-7) = -47$
> > $\Delta < 0$ donc le polynôme Q n'admet pas de racine. Le polynôme Q n'est donc pas factorisable.

Exemple:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 4x - 1 = 0$.

> > $\Delta = (-4)^2 - 4\times2\times(-1) = 24$
> > $\Delta > 0$ donc l'équation $2x^2 - 4x - 1 = 0$ admet deux solutions:
> > $x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{24}}{2\times2} = \frac{4-2\sqrt{6}}{4} = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{24}}{2\times2} = \frac{4+2\sqrt{6}}{4} = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$
> > $S = \left\{\frac{2-\sqrt{6}}{2}; \frac{2+\sqrt{6}}{2}\right\}$

Remarque:

> Supposons que le polynôme P du second degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx + c$ où $a, b,$ et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$ possède 2 racines x_1 et x_2.
> On a alors:
> $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ et $x_1 \times x_2 = \frac{c}{a}$

Exemple:

Trouver deux nombres réels dont la somme vaut 4 et le produit $3,84$.

> > Les deux nombres cherchés sont donc les solutions de $ax^2 + bx + c = 0$ avec $-\frac{b}{a} = 4$ et $\frac{c}{a} = 3,84$
> > Or
> > $ax^2 + bx + c = 0 \iff x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \iff x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \iff x^2 - 4x + 3,84 = 0$
> > Résolvons alors cette dernière équation:
> > $\Delta = (-4)^2 - 4\times1\times3,84 = 0,64$
> > Donc $\Delta > 0$
> > Ainsi l'équation $x^2 - 4x + 3,84 = 0$ admet deux solutions:
> > $x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{0,64}}{2\times1} = \frac{4-0,8}{2} = 1,6$ et $x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{0,64}}{2\times1} = \frac{4+0,8}{2} = 2,4$
> > $S = \{1,6; 2,4\}$

> Les deux nombres cherchés sont donc $1,6$ et $2,4$.

Exemple:

On considère le polynôme P du second degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 4x^2 - 20x + 24$.

1. Les nombres 2 et 3 sont-ils racines de P?
2. En déduire la factorisation de P.

> 1. $P(2) = 4 \times 2^2 - 20 \times 2 + 24 = 0$
> $P(3) = 4 \times 3^2 - 20 \times 3 + 24 = 0$
>   Donc 2 et 3 sont bien racines du polynôme P.
> 2. On a donc:
> $\forall x \in \mathbb{P}, P(x) = 4(x-2)(x-3)$

Exemple:

On considère le polynôme P du second degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = 3x^2 - 27x + 24$.

1. Le nombres 1 est-il racine de P?
2. En déduire la factorisation de P.

> 1. $P(1) = 3 \times 1^2 - 27 \times 1 + 24 = 0$
>   Donc 1 est bien racine du polynôme P.
> 2. On a donc:
> $\forall x \in \mathbb{P}, P(x) = 3(x-1)(x-a)$ où a est la seconde racine du polynôme P
>   (éventuellement égale à 1, cas de la racine double).
> $P(x) = 3(x-1)(x-a) = 3x^2 - 3(1+a)x + 3a$
>   Donc $3x^2 - 3(1+a)x + 3a = 3x^2 - 27x + 24$
>   Par identification terme à terme, on a:
> $\begin{cases} -3(1+a) = -27 \\ 3a = 24 \end{cases}$
>   On en déduit que $a = 8$ est la solution du système.
>   Donc $\forall x \in \mathbb{P}, P(x) = 3(x-1)(x-8)$

3. Signe du polynôme du second degré $ax^2 + bx + c$

> Considérons le polynôme P du second degré tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b, et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$. Soit Δ son discriminant.
>
> - Si $\Delta < 0$ alors $ax^2 + bx + c$ ne s'annule jamais et $\forall x \in \mathbb{R}$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a.

x	$-\infty$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

- Si $\Delta = 0$ alors le polynôme ax^2+bx+c s'annule en $x_0 = -\frac{b}{2a}$ et $\forall x \in \mathbb{R}$, ax^2+bx+c est du signe de a.

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
ax^2+bx+c		signe de a	0	signe de a	

- Si $\Delta > 0$ alors le polynôme ax^2+bx+c s'annule en $x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$. De plus, ax^2+bx+c est du signe de a sur $[-\infty; min(x_1;x_2)]$ et sur $[max(x_1;x_2); +\infty]$ et du signe de $-a$ sur $[min(x_1;x_2); max(x_1;x_2)]$

x	$-\infty$		$min(x_1;x_2)$		$max(x_1;x_2)$	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a	

Remarque:

Pour résoudre une inéquation du second degré du type $ax^2+bx+c > 0$ où a, b, et c sont trois nombres réels avec $a \neq 0$, il faut:

- Déterminer le signe de ax^2+bx+c selon les valeurs de x.
- En déduire les solutions de l'inéquation.

Exemple:

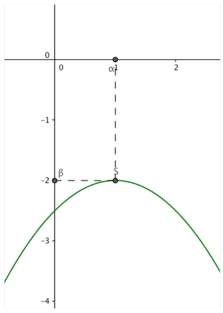
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 4x - 1 > 0$.

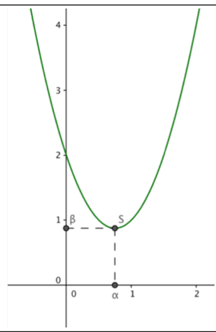
$\Delta = (-4)^2 - 4 \times 2 \times (-1) = 24$
$\Delta > 0$ donc le polynôme $2x^2 - 4x - 1$ admet deux racines:
$x_1 = \frac{-(-4)-\sqrt{24}}{2\times 2} = \frac{4-2\sqrt{6}}{4} = \frac{2-\sqrt{6}}{2}$ et $x_2 = \frac{-(-4)+\sqrt{24}}{2\times 2} = \frac{4+2\sqrt{6}}{4} = \frac{2+\sqrt{6}}{2}$
Ainsi on a le tableau de signes suivant:

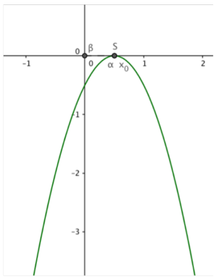
x	$-\infty$		$\frac{2-\sqrt{6}}{2}$		$\frac{2+\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$
ax^2+bx+c	+		0	−	0	+

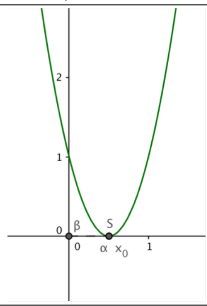
Ainsi $S = \left[-\infty; \frac{2-\sqrt{6}}{2}\right[\cup \left]\frac{2+\sqrt{6}}{2}; +\infty\right]$

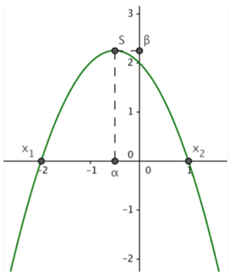
V. Résumé

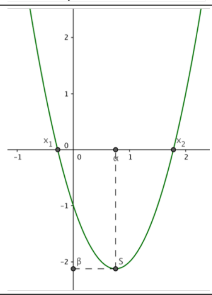
<table>
<tr><th></th><th>$a < 0$</th><th>$a > 0$</th></tr>
<tr><td>Δ< 0</td><td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>$-$</td></tr></table>
pas de racine.
non factorisable.</td><td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>$+$</td></tr></table>
pas de racine.
non factorisable.</td></tr>
<tr><td>Δ= 0</td><td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table>
1 racine double: $x_0 = -\frac{b}{2a}$
factorisable:
$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$</td><td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_0</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table>
1 racine double: $x_0 = -\frac{b}{2a}$
factorisable:
$ax^2+bx+c = a(x-x_0)^2$</td></tr>
<tr><td>Δ> 0</td><td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>$-$</td><td>0 $+$</td><td>0</td><td>$-$</td></tr></table>
2 racines: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
factorisable:
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$</td><td>

<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>ax^2+bx+c</td><td>$+$</td><td>0 $-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr></table>
2 racines: $x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$
factorisable:
$ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$</td></tr>
</table>