Calcul vectoriel et produit scalaire

I. Un peu d'histoire

La notion de vecteur était implicite en mécanique depuis Galilée mais a mis longtemps à prendre sa forme actuelle. On observe un lien entre analyse et géométrie en étudiant la façon dont la notion de vecteur apparait chez Leibniz au cours de ses recherches sur l'élaboration d'un calcul des variations. Le XIXe siècle voit l'élaboration conjointe de ce qui deviendra le produit scalaire et de la notion de travail en physique.
Le calcul vectoriel et le produit scalaire permettent une approche de la géométrie différente de celle des Anciens, sans doute puissante, avec l'avantage de combiner vision géométrique et calcul.
Les cercles font partie des plus vieux objets mathématiques. La caractérisation du cercle de diamètre AB comme ensemble des points M tels que le triangle AMB soit rectangle en M semble remonter à Thalès. Mais ce n'est qu'au XVIIe siècle que Descartes élabore la méthode des coordonnées et écrit l'équation d'un cercle en repère orthonormé.

II. Norme d'un vecteur

Norme d'un vecteur

> Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur et A et B deux points tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $||\overrightarrow{u}||$, est la longueur AB.

Propriété 1

> Dans un repère orthonormé, on considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. La norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Propriété 2

> Dans un repère orthonormé, on considère un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un nombre $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:
> $||\lambda \overrightarrow{u}|| = |\lambda| ||\overrightarrow{u}||$

Exemple

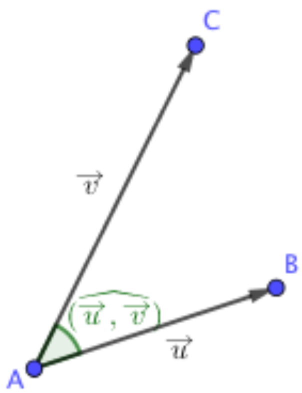
Dans un repère orthonormé, on considère le vecteur $\overrightarrow{u} \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\|\overrightarrow{u}\|$.
2. Soient A et B deux points du plan tels que $\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{13}\overrightarrow{u}$. Calculer $\|\overrightarrow{AB}\|$.

> > 1. $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13$
> > 2. $\|\overrightarrow{AB}\| = \left\|-\frac{2}{13}\overrightarrow{u}\right\| = \left|-\frac{2}{133}\right| \|\overrightarrow{u}\| = \frac{2}{13} \times 13 = 2$

III. Produit scalaire de deux vecteurs

Définition 1

> Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On note $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$ l'angle géométrique $\widehat{BAC}$ où $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et
>
> 
>
>
> $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

Définition 2

> On appelle produit scalaire de deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ le nombre réel, noté $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$ défini par $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$

Exemple

1. Soit ABC un triangle tel que $AB = 3, AC = 4$ et $\widehat{BAC} = \frac{\pi}{3}\ rad$.
   Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

> > $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = 3 \times 4 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 12 \times \frac{1}{2} = 6$

Cas particuliers

> Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs colinéaires du plan.
>
> - Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de même sens alors $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$
> - Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraires alors $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = -\|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\|$

Exemple

Soient A, B et C trois points alignés dans cet ordre tels que $AB = 2$ et $BC = 3$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. Calculer $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

> > 1. $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires de même sens donc
> > $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| = 2 \times 5 = 10$
> > 2. $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires de sens contraires donc
> > $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = -\|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BC}\| = -2 \times 3 = -6$

Définition 3

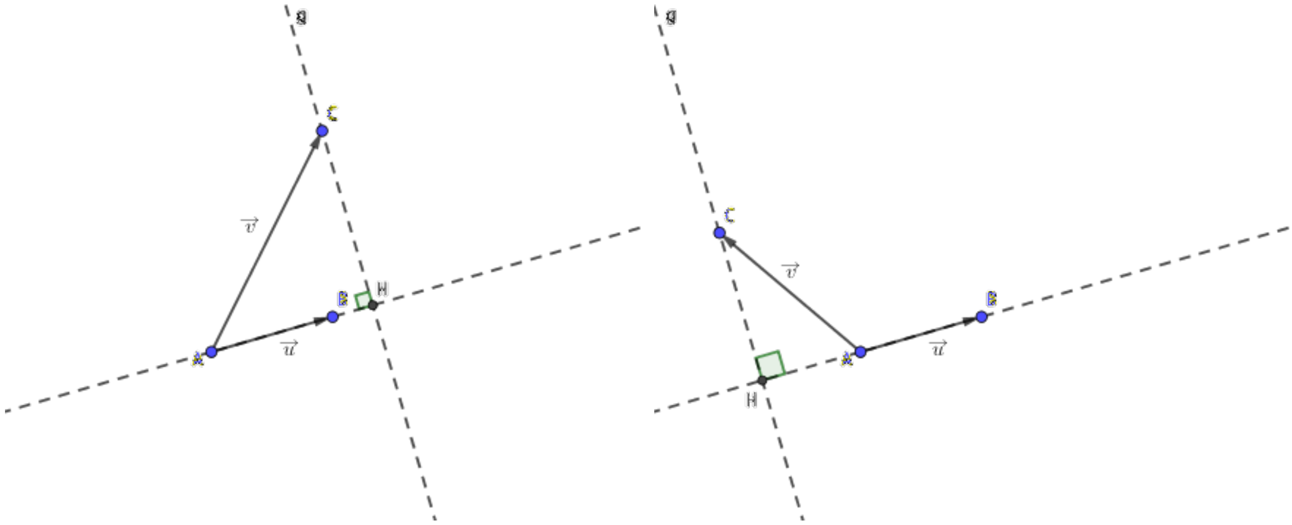
> Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = 0$.

Propriété

> Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs du plan. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
> $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} . \overrightarrow{u}$
> $\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right) . \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} . \overrightarrow{w} + \overrightarrow{v} . \overrightarrow{w}$
> $\left(\lambda \overrightarrow{u}\right) . \overrightarrow{v} = \lambda \times \overrightarrow{u} . \overrightarrow{v}$
> $\overrightarrow{u} . \overrightarrow{u} = \|\overrightarrow{u}\|^2$

Propriété: 2ème façon de calculer el produit scalaire de deux vecteurs

> Soient A, B et$C$ trois points du plan. Soit H le projeté orthogonal de C sur la droite (AB).
> On a alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$.



Exemple

ABC est un triangle isocèle en A tel que $AB = 3\ cm$ et $BC = 4\ cm$.

1. a. Calculer $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}$.

   b. En déduire la valeur exacte de $\cos\widehat{ABC}$.

   c. En déduire une valeur approchée par défaut de $\widehat{ABC}$ au dixième de radian près.
2. Soit I le porjeté orthogonal du point C sur la droite (AB). Calculer BI. Vous en donnerez la valeur exacte puis la valeur approchée par excès au mm près.

> > 1. a. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH}$ où H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC). Or ABC est isocèle en A donc H est le milieu du segment $[BC]$ et les vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires de même sens.
> >   Ainsi $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BH} = \|\overrightarrow{BC}\| \times \|\overrightarrow{BH}\| = 4 \times 2 = 8$
> >   b. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 8$ donc
> > $\left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}}\right) = 8$
> > $4 \times 3 \times \cos\widehat{ABC} = 8$
> > $\cos\widehat{ABC} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$
> >   c. $\widehat{ABC} = \arccos\frac{2}{3} \approx 0,84$
> > 2. $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BI} = \|\overrightarrow{BA}\| \times \|\overrightarrow{BI}\| = 3 \times BI$
> >   On a donc $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA} = 3BI$
> > $8 = 3BI$
> > $BI = \frac{8}{3}$
> > $BI \approx 2,7\ cm$

Propriété: 3ème façon de calculer el produit scalaire de deux vecteurs

> Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
> Le produit scalaire de $\overrightarrow{u}$ par $\overrightarrow{v}$ est $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = xx' + yy'$.

Exemple

Dans un repère orthonormé, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

> $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 \times 2 + 4 \times 3 = 18$

Propriété

> Dans un repère orthonormé, on considère les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
> $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont deux vecteurs orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' = 0$

Exemple

Dans un repère orthonormé, on a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$.

Que dire du triangle ABC?

>> $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3 \times (-2) + 4 \times 1,5 = -6 + 6 = 0$
>> Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc orthogonaux. Le triangle ABC est donc rectangle en A.

idéntités remarquables

> $\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
> $\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\|^2 = \|\overrightarrow{u}\|^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + \|\overrightarrow{v}\|^2$
> $\left(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right)\left(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right) = \|\overrightarrow{u}\|^2 - \|\overrightarrow{v}\|^2$

Propriété: 4ème façon de calculer el produit scalaire de deux vecteurs

> Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs du plan. On a:
> $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}\right\|^2\right)$
> $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{u}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{v}\right\|^2\right)$

Exemple

Soit ABC un triangle tel que $AB = 3\ cm$, $BC = 4\ cm$ et $AC = 6\ cm$.

Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

> $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right\|^2\right)$$
> $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right\|^2\right)$$
> $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\right\|^2\right)$$
> $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left\|\overrightarrow{AB}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{CB}\right\|^2\right)$$
> $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - CB^2\right)$$
> $$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3^2 + 6^2 - 4^2 = 9 + 36 - 16 = 29$$