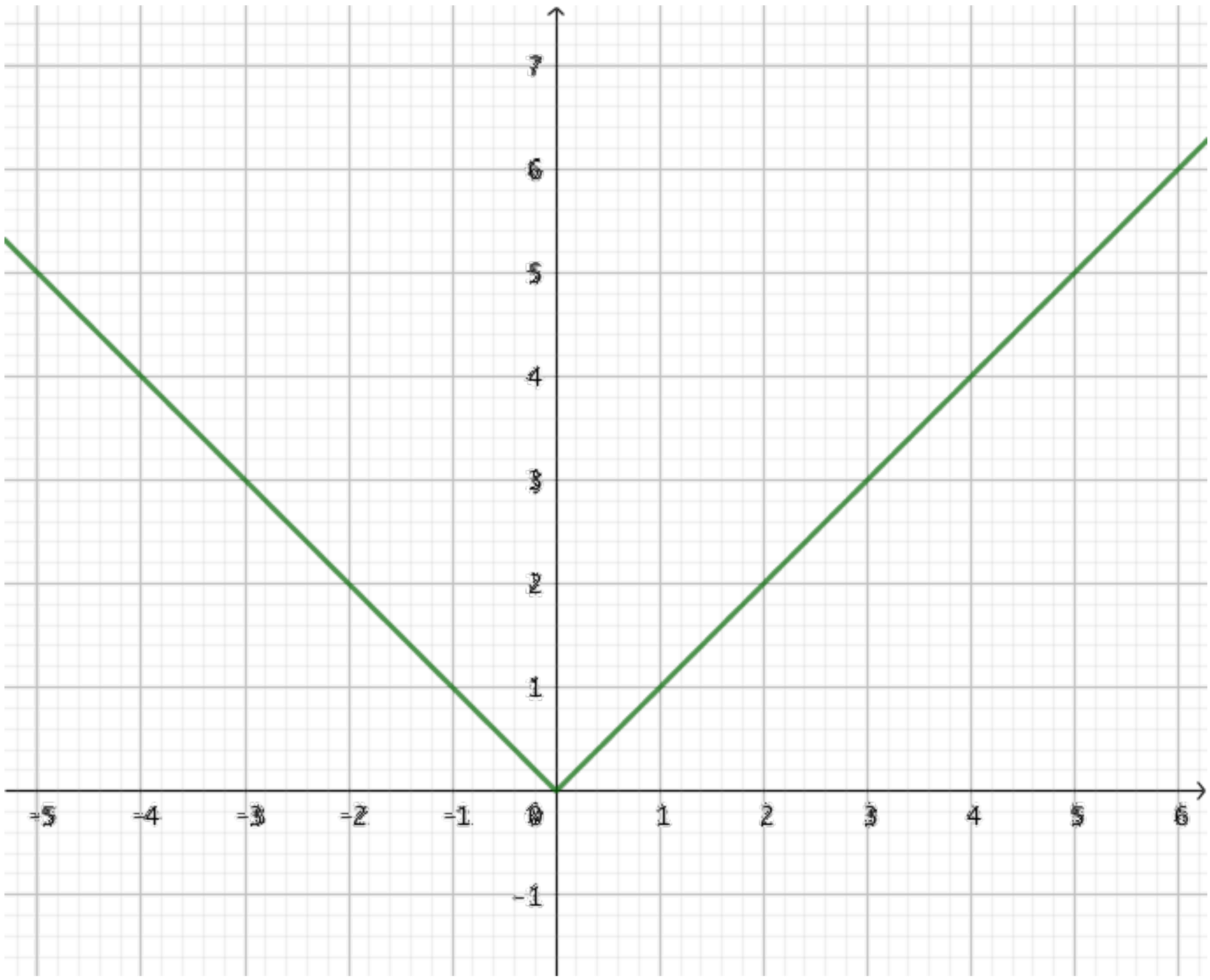
Dérivation - application aux fonctions non polynomiales

I. Fonction valeur absolue

Définition 1

> La fonction valeur absolue est la fonction, notée $|.|$ définie sur $\mathbb{R}$ par:
>
> - $\forall x \in \mathbb{R}_+, |x| = x$
> - $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, |x| = -x$

Courbe représentative



> La courbe représentative de la fonction valeur absolue est composée de deux demi-droites d'origine l'origine du repère.

Dérivabilité

> La fonction valeur absolue est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
> De plus, $\forall x \in \mathbb{R}_+, |x|' = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-, |x|' = -1$

Démonstration de la non dérivabilité en O

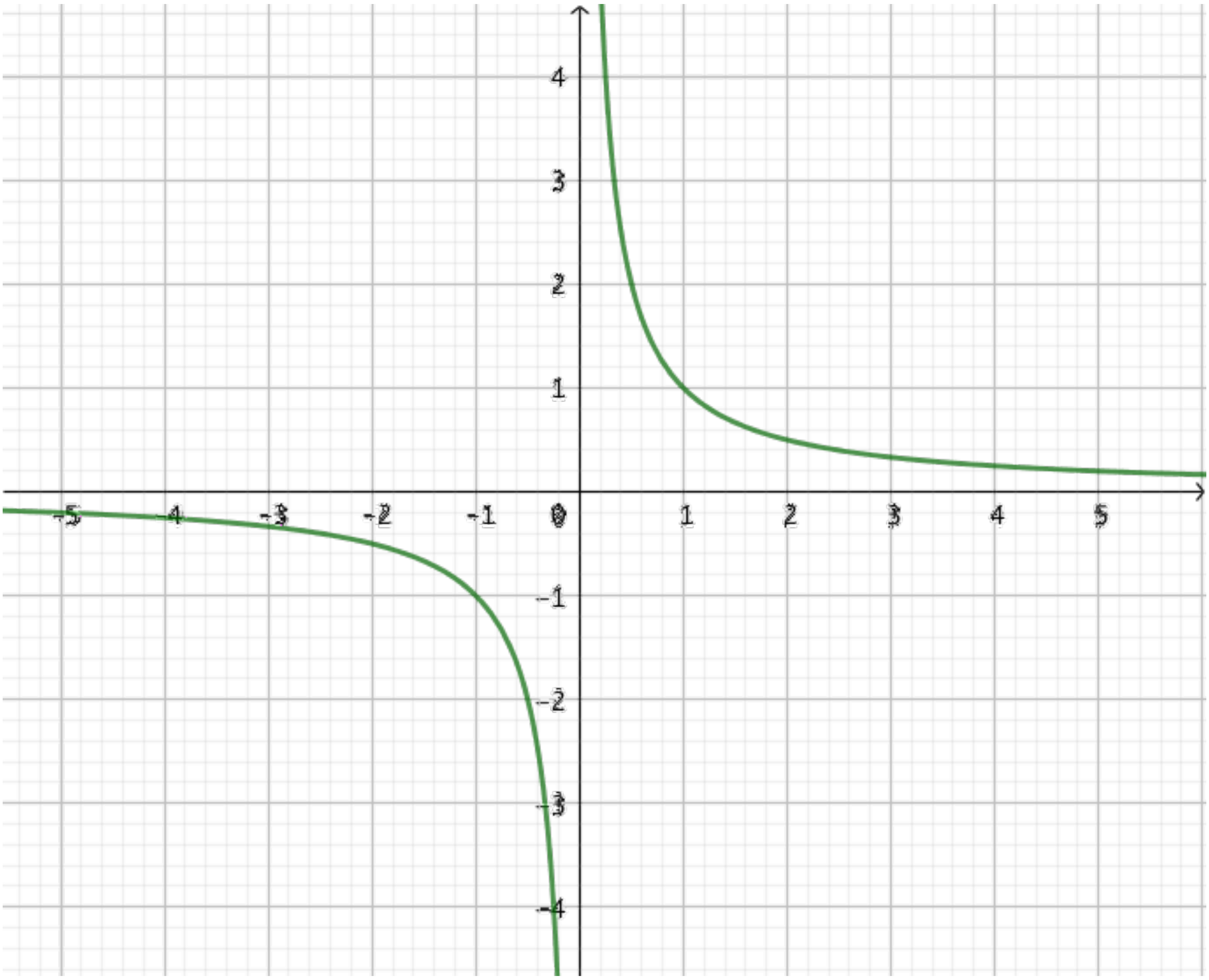
> > Calculons le taux d'accroissement de la fonction valeur absoule entre 0 et $0 + h$:
> > $\frac{|0+h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h}$
> > or $|h| = h$ si $h > 0$ et $|h| = -h$ si $h < 0$
> > Il faut donc voir les deux cas suivants:
> > 1^{er} cas: $h > 0$
> > $\frac{|h|}{h} = \frac{h}{h} = 1 \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} 1 = 1 \in \mathbb{R}$
> > $2^{\text{ème}}$ cas: $h < 0$
> > $\frac{|h|}{h} = \frac{-h}{h} = -1 \lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} -1 = -1 \in \mathbb{R}$
> > Donc $\lim\limits_{h \to 0} \frac{p(0+h)-p(0)}{h}$ n'existe pas.
> > La fonction valeur absolue n'est donc pas dérivable en 0.
> > Graphiquement,on peut remarquer qu'on ne peut pas construire une unique tangente à la courbe représentative de la fonction valeur absolue en 0.

II. Fonction inverse

Définition 2

> La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par:
>
> $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{1}{x}$

Courbe représentative



> La courbe représentative de la fonction inverse est une hyperbole.

Dérivabilité

> La fonction inverse est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
> $\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

Démonstration

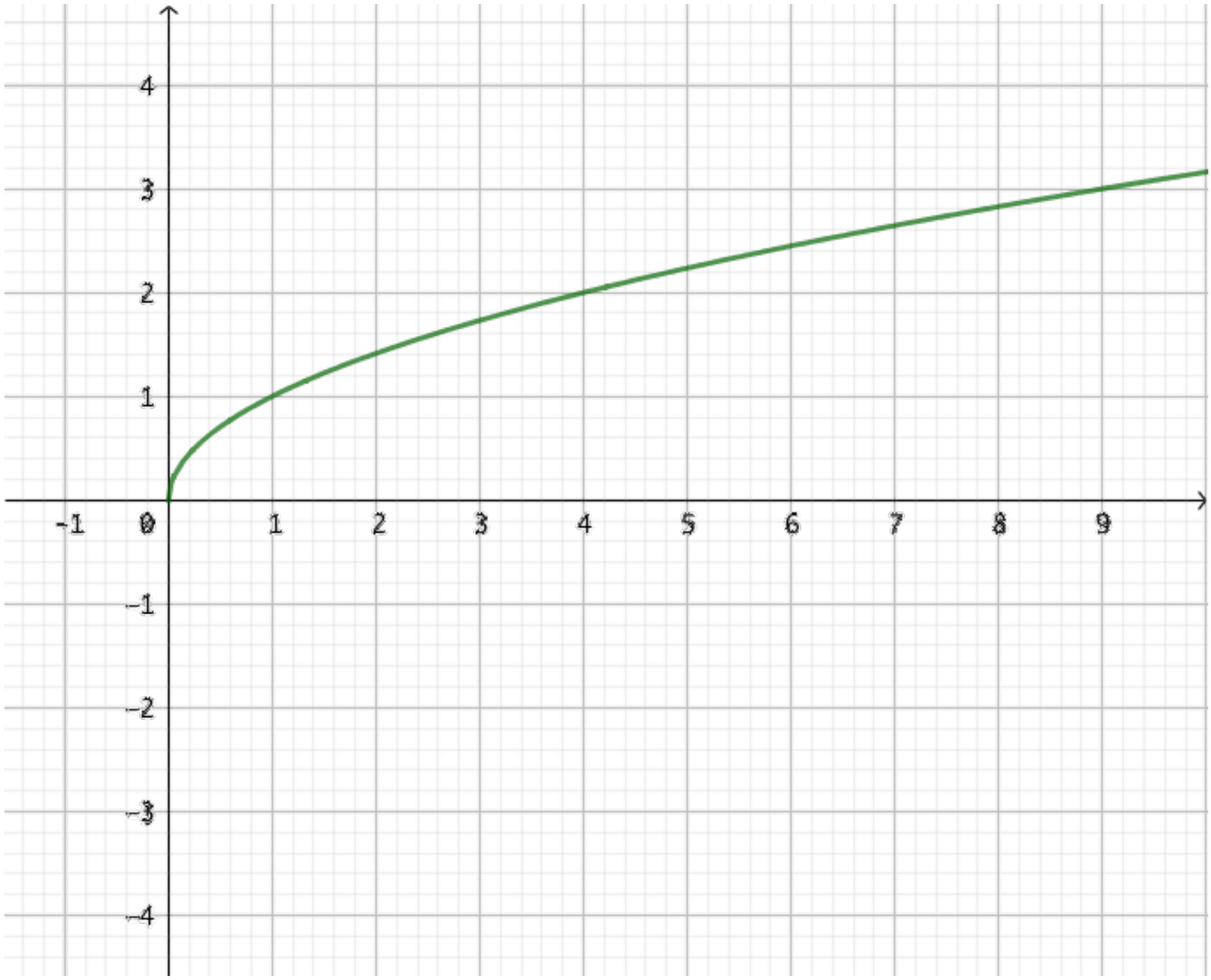
> > Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit f la fonction inverse. Calculons le taux d'accroissement de f entre a et $a+h$:
> > $\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h} = \frac{\frac{a-(a+h)}{a(a+h)}}{h} = \frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} \frac{-h}{ah(a+h)} = \frac{-1}{a(a+h)}$
> > $\lim\limits_{h \to 0} \frac{-1}{a(a+h)} = \frac{-1}{a \times a} = \frac{-1}{a^2} \in \mathbb{R}$
> > Donc $\forall a \in \mathbb{R}^*$, le nombre dérivé de f en a est $\frac{-1}{a^2}$.
> > La fonction dérivée de la fonction inverse est donc la fonction f' définie sur $\mathbb{R}^*$ par
> > $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$

III. Fonction racine carrée

Définition 3

> La fonction racine carrée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$

Courbe représentative

> 
>
>
> La courbe représentative de la fonction inverse est une demi-parabole.

Dérivabilité

> La fonction racine carrée est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
> $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Démonstration de la non dérivabilité en O

> > Calculons le taux d'accroissement de la fonction racine carrée entre 0 et $0 + h$, h étant forcément positif pour que $0 + h$ appartienne à $\mathbb{R}_+$.
> > $\frac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}$
> > $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty \notin \mathbb{R}$

> Donc la fonction racine carrée n'admet pas de nombre dérivé en O.
> Elle n'est donc pas dérivable en O.

IV. Tableau des fonctions dérivées des fonctions usuelles

la fonction f définie par:	sur	fonction dérivée définie par	sur
$f(x) = k$, avec $k \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = mx + p$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = m$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 2x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^3$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 3x^2$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) =\mid x\mid$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$ si $x > 0$ $f'(x) = -1$ si $x < 0$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$

V. Opérations sur les fonctions dérivables

> Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I. Soit $k \in \mathbb{R}$.

Type d'opération	Fonction à dériver	Fonction dérivée	Remarque
Dérivée d'une somme	$u+v$	$u' + v'$	
Dérivée d'une différence	$u-v$	$u' - v'$	
Dérivée du produit par une constante	ku	ku'	
Dérivée du produit	$u\times v$	$u' \times v + u\times v'$	
Dérivée du inverse	$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	v ne doit pas s'annuler sur I
Dérivée du quotient	$\frac{u}{v}$	$\frac{u'\times v - u\times v'}{v^2}$	v ne doit pas s'annuler sur I

Démonstration de la fonction dérivée d'un produit

> Soient u et v deux fonctions définies et dérivbles sur un intervalle I.
> Soit $a\in I$ et $h\in\mathbb{R}$ de sorte que $a+h\in I$.
> Calculons le taux d'accroissement de la fonction uv entre a et $a+h$:
> $\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} = \frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a+h)+u(a)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} = \frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)+u(a)(v(a+h)-v(a))}{h}$
> $= \frac{(u(a+h)-u(a))v(a+h)}{h} + \frac{u(a)(v(a+h)-v(a))}{h} = \frac{u(a+h)-u(a)}{h}v(a+h) + u(a)\frac{v(a+h)-v(a)}{h}$
> Or :
>
> - $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(u(a+h)-u(a))}{h} = u'(a)\in\mathbb{R}$ car u est dérivable sur I.
> - $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(v(a+h)-v(a))}{h} = v'(a)\in\mathbb{R}$ car v est dérivable sur I.
> - $\lim\limits_{h\to 0} v(a+h) = v(a)$.
>   Donc $\lim\limits_{h\to 0}\frac{u(a+h)v(a+h)-u(a)v(a)}{h} = u'(a)v(a)+u(a)v'(a)\in\mathbb{R}$.
>   Ainsi, $\forall x\in I, (uv)'(x) = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$.

Exemple:

Déterminer les fonctions dérivées de:

1. $f(x)=\sqrt{x}\times x^2$ définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. $g(x)=\frac{2x+4}{3x-2}$ définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$.
3. $h(x)=\cos x\times\sin x$ définie sur $\mathbb{R}$.
4. $p(x)=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbb{Z}\right\}$.

> > 1. $x\mapsto\sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $x\mapsto x^2$ l'est sur $\mathbb{R}$ donc f l'est sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de

> fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$. $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\times x^2+\sqrt{x}\times 2x=\frac{x\sqrt{x}}{2}+2x\sqrt{x}=\frac{5}{2}x\sqrt{x}$
> 2. g est dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ comme quotient de fonction dérivables sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$.
> En posant $u(x)=2x+4$ et $v(x)=3x-2$, on a $g(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$. De plus, v ne s'annule pas sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$.
> $g'(x)=\frac{u'(x)\times v(x)-u(x)\times v'(x)}{[v(x)]^2}=\frac{2\times(3x-2)-(2x+4)\times 3}{(3x-2)^2}=\frac{6x-4-6x-12}{(3x-2)^2}=-\frac{16}{(3x-2)^2}$
> 3. h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonction dérivables sur $\mathbb{R}$.
> $h'(x)=-\sin x\times\sin x+\cos x\times\cos x=(\cos x)^2-(\sin x)^2$
> 4. p est dérivable sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$. De plus $\cos x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$.
> Donc $p'(x)=\frac{\cos x\times\cos x-\sin x\times(-\sin x)}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{1}{(\cos x)^2}$
> Remarque: on a aussi $p'(x)=\frac{(\cos x)^2+(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=\frac{(\cos x)^2}{(\cos x)^2}+\frac{(\sin x)^2}{(\cos x)^2}=1+\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)^2$.
> Donc $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}, \tan' x=1+(\tan x)^2$.

Propriété

> Soient $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$. Soit g une fonction dérivable sur un intervalle I.
> Soit f la fonction définie sur un intervalle J par $f(x)=g(ax+b)$ avec, $\forall x\in J, ax+b\in I$.
> On a : $f'(x)=ag'(ax+b)$.

Exemple:

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}$ par $f(x)=\frac{1}{3x-2}$.
Déterminer $f'(x)$.

> $\forall x\in\mathbb{R}-\left\{\frac{2}{3}\right\}, 3x-2\in\mathbb{R}^*$.
> Soit g la fonction inverse (définie sur $\mathbb{R}^*$). On a $f(x)=g(3x-2)$.
> Ainsi $f'(x)=3\times\left(-\frac{1}{(3x-2)^2}\right)=-\frac{3}{(3x-2)^2}$.

VI. Variations (rappels du chapitre 3)

Définition 4

> Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
>
> - $\forall x\in I, f'(x)>0\Leftrightarrow f$ est strictement croissante.
> - $\forall x\in I, f'(x)<0\Leftrightarrow f$ est strictement décroissante.
> - $\forall x\in I, f'(x)=0\Leftrightarrow f$ est constante.

Remarque

> - $\forall x\in I, f'(x)\leqslant 0\Leftrightarrow f$ est décroissante.

> - $\forall x \in I, f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow f$ est croissante.

Définition 5

> Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.
> La fonction f admet un extremum local si et seulement si $\exists x_0 \in I, f'(x)$ change de signe en x_0 et $f'(x_0) = 0$

Remarque

> Il existe deux type d'extrema: le maximum et le minimum.