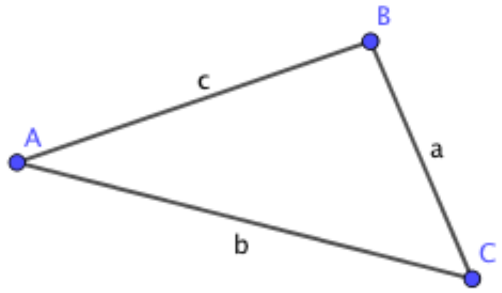
Chapitre XI - Application du produit scalaire

I. Formule d'Al-Kashi

> Soit ABC un triangle quelconque. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.
>
> 
>
>
> On a :
> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$
> $b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B}$
> $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}$

Démonstration

> $a^2 = BC^2 = \left\|\overrightarrow{BC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{BA}\right\|^2 + 2\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{AC} + \left\|\overrightarrow{AC}\right\|^2$
> $a^2 = c^2 + 2\left(-\overrightarrow{AB}\right).\overrightarrow{AC} + b^2 = b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}b^2 + c^2 + 2\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$
> $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A}$
> De même pour les autres égalités.

Remarque

> Dans le théorème d'Al-Kashi, si le triangle est rectangle en A, on retrouve le théorème de Pythagore

> puisque $\cos \frac{\pi}{2} = 0$. On a bien $a^2 = b^2 + c^2$.

II. Transformation de $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}$

> Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$. Soit I le milieu du segment $[AB]$.
> $\forall M \in \mathscr{P}, \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = MI^2 - IA^2 = MI^2 - IB^2 = MI^2 - \frac{1}{4}AB^2$.

Propriété

> L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$.

Démonstration

>> Soient A et B deux points du plan $\mathscr{P}$. Soit I le milieu du segment $[AB]$.
>> Soit M un point du plan tel que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$.
>> On a donc:
>> $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$
>> $\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 0$
>> Or I est le milieu du segment $[AB]$ donc $\overrightarrow{IB} = -\overrightarrow{IA}$. On a donc:
>> $\left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right).\left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = 0$
>> $\left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 - \left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2 = 0$
>> $\left\|\overrightarrow{MI}\right\|^2 = \left\|\overrightarrow{IA}\right\|^2$
>> $MI^2 = IA^2$
>> $MI = IA$ car MI et IA sont des longueurs donc positives.
>> Le point M est donc un point du cercle de centre I et de rayon IA ou encore du cercle de diamètre $[AB]$.
>> L'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0$ est donc le cercle de diamètre $[AB]$.

III. Equation de droite

On se ramène, dans cette partie, à un repère orthonormé $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$.

rappel L'ensemble des points $M(x; y)$ qui vérifient $ax + by + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$ et $(a; b) \neq (0; 0)$ est une droite. $ax + by + c = 0$ s'appelle l'équation cartésienne de la droite.

Définition

> Le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$ et $(a; b) \neq (0; 0)$.

Définition

> Le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$, avec $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$ et $(a; b) \neq (0; 0)$.

Remarque

> Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

Exemple 1 :

1. Déterminer l'équation de la droite (d) passant par le point $A(1; 2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$
2. Déterminer l'équation de la droite (d') passant par le point $B(3; 5)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$

> > 1. L'équation d'une droite de coefficient directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est de la forme $ax + by + c = 0$. Or $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d) donc $b = -3$ et $a = 5$.
> >   Ainsi on a : $(d) : 5x - 3y + c = 0$
> >   Or $A(1; 2) \in (d)$ donc:
> > $5 \times 1 - 3 \times 2 + c = 0$
> > $5 - 6 + c = 0$
> > $-1 + c = 0$
> > $c = 1$
> >   Ainsi on a : $(d) : -3x + 5y + 1 = 0$
> > 2. L'équation d'une droite de coefficient normal $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est de la forme $ax + by + c = 0$.
> >   Or $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à la droite (d') donc $a = 4$ et $b = 5$.
> >   Ainsi on a : $(d') : 4x + 5y + c = 0$
> >   Or $B(3; 5) \in (d')$ donc:
> > $4 \times 3 + 5 \times 5 + c = 0$
> > $12 + 25 + c = 0$
> > $37 + c = 0$
> > $c = -37$
> >   Ainsi on a : $(d') : 4x + 5y - 37 = 0$

Exemple 2 :

Dans un repère orthonormé, on considère la droite (d) d'équation cartésienne $-2x+3y+5=0$.
Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point $A(5;6)$ sur (d).

> L'équation de la droite (d) est $-2x+3y+5=0$ donc $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (d).
> H est le projeté orthogonal du point A sur la droite (d) donc les vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{u}$ sont orthogonaux. Ainsi $\overrightarrow{u}$ est un vecteur normal à la droite (AH).
> On a donc:
> $(AH):-3x-2y+c=0$
> Or $A(5;6)\in(AH)$ donc:
> $-3\times5-2\times6+c=0$
> $-15-12+c=0$
> $-27+c=0$
> $c=27$
> Ainsi, on a:
> $(AH):-3x-2y+27=0$

IV. Equation de cercle

Définition

> L'équation d'un cercle de centre $\Omega\left(x_\Omega;y_\Omega\right)$ et de rayon R est $\left(x-x_\Omega\right)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2=R^2$.

Exemple 3 :

Soit le cercle $\mathscr{C}$ de centre $K(2;2)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$.
2. Quelle est la nature de l'ensemble $\mathscr{E}$ des points $M(x;y)$ définis par $(x-1)^2+(y+1)^2=25$?
3. Déterminer les points d'intersection de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{E}$.

> 1. $\mathscr{C}:(x-2)^2+(y-2)^2=\sqrt{5}^2$
> $\mathscr{C}:(x-2)^2+(y-2)^2=5$
> 2. L'ensemble $\mathscr{E}$ est le cercle de centre $L(1;-1)$ et de rayon $\sqrt{25}=5$.
> 3. Il faut résoudre le système suivant:
> $\left\{\begin{array}{rcl}(x-2)^2+(y-2)^2&=&5\\(x-1)^2+(y+1)^2&=&25\end{array}\right.$
> $\left\{\begin{array}{rcl}x^2-4x+4+y^2-4y+4&=&5\\x^2-2x+1+y^2+2y+1&=&25\end{array}\right.$

$$\begin{cases} 2x-3+6y-3 &= 20 \\ x^2-2x+1+y^2+2y+1 &= 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x &= 20+3+3-6y \\ x^2-2x+1+y^2+2y+1 &= 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x &= 26-6y \\ x^2-2x+1+y^2+2y+1 &= 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 13-3y \\ x^2-2x+1+y^2+2y+1 &= 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 13-3y \\ (13-3y)^2-2(13-3y)+1+y^2+2y+1 &= 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 13-3y \\ 169-78y+9y^2-26+6y+1+y^2+2y+1-25 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x &= 13-3y \\ 10y^2-70y+120 &= 0 \end{cases}$$

Résolvons la deuxième équation du système. Il s'agit d'une équation du second degré.

$\Delta = (-70)^2 - 4 \times 10 \times 120 = 100$

$\Delta > 0$ donc le polynôme admet deux racines:

$y_1 = \frac{-(-70)-\sqrt{100}}{2\times 10} = 3$

$y_2 = \frac{-(-70)+\sqrt{100}}{2\times 10} = 4$

D'où $x_1 = 13 - 3y_1 = 13 - 3 \times 3 = 4$
et $x_2 = 13 - 3y_2 = 13 - 3 \times 4 = 1$

Les points d'intersections de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{C}$ sont les points de coordonnées $(4;3)$ et $(1;4)$.