Chapitre X - Comportement d'une suite

I. Sens de variation d'une suite

Définition 1

> Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
>
> - croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$
> - décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$
> - constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

Remarque

> On a aussi:
> Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :
>
> - croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \geq 0$
> - décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$
> - constante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = 0$

Exemple

Soit la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

>> 1. $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n^2$ donc $u_{n+1} = (n+1)^2$.
>>   Ainsi $u_{n+1} - u_n = (n+1)^2 - n^2 = (n+1-n)(n+1+n) = 2n+1$.
>>   Or $n > 0$ donc $2n+1 > 0$.
>>   On a bien $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$.
>>   Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
>> 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$

Remarque

> Soit f une fonction et u une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$.
> Si f est croissante (respectivement décroissante) sur $\mathbb{R}_+$ alors u est croissante (respectivement décroissante).

Exemple

Soit la suite u définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2}{n+2}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

> 1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{2}{x+2}$.
> $f'(x) = -\frac{2}{(x+2)^2}$
>   Donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, f'(x) < 0$. Ainsi f est une fonction décroissante.
>   Or $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = f(n)$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
> 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n+2} = 0$

Remarque

> Si les termes de la suite u sont strictement positifs, alors on a :
>
> - u est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
> - u est décroissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$.

Exemple

Soit la suite u définie pour tout n strictement positif par $u_n = \frac{3}{2n-1}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

> 1. $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n-1 > 0$. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{2(n+1)-1}}{\frac{3}{2n-1}} = \frac{3(2n-1)}{3(2(n+1)-1)} = \frac{2n-1}{2n+1}$
>   Or $\forall n \in \mathbb{N}^*, 2n-1 < 2n+1$
>   C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{2n-1}{2n+1} < 1$
>   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.
> 2. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{2n-1} = 0$.

II. Suites arithmétiques

Propriété

> Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.
>
> - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $r > 0$. Auquel cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
> - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $r < 0$. Auquel cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

> - $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $r = 0$. Auquel cas $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$.

Exemple

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_n = 5 - 2n$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique.
2. Déterminer son sens de variation. Justifier.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

> > 1. $u_{n+1} - u_n = (5 - 2(n+1)) - (5 - 2n) = 5 - 2n - 2 - 5 + 2n = -2$
> > $u_{n+1} - u_n$ ne dépend pas de n donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison -2 et de terme initial $u_0 = 5 - 2\times 0 = 5$.
> > 2. La raison de la suite arithmétique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négative ($-2 < 0$) donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
> > 3. $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

III. Suites géométriques

Propriété

> Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$ et de terme initial positif.
>
> - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $q > 1$. Auquel cas $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.
> - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $0 < q < 1$. Auquel cas $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
> - $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $q = 1$. Auquel cas $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = v_0$.
>
> Soit $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q > 0$ et de terme initial négatif.
>
> - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante si et seulement si $q > 1$. Auquel cas $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = -\infty$.
> - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $0 < q < 1$. Auquel cas $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$.
> - $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $q = 1$. Auquel cas $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = v_0$.

Exemple

Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $v_n = \frac{3}{2^n}$.

1. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
2. Déterminer le sens de variation de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

> > 1. $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{\frac{3}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2^n}} = \frac{3}{2^{n+1}} \times \frac{2^n}{3} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$
> > $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ ne dépend pas de n donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $v_0 = \frac{3}{2^0} = 3.$
> > 2. La raison de la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nécomprise entre 0 et 1 ($0 < \frac{1}{2} < 1$) donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante.
> > 3. $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0.$

IV - le cas de la suite $(e^{na})_{n\in\mathbb{N}}$

Propriété 3

> Soit $a \in \mathbb{R}$. La suite $(e^{na})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison e^a et de terme initial 1.

Démonstration
Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = e^{na}$.
$\forall n \in \mathbb{N}, e^{na} = (e^a)^n$.
En posant $q = e^a$, on a $u_n = q^n = 1 \times q^n$, ce qui est l'expression d'une suite géométrique de raison q et de terme initial 1.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite géométrique de raison e^a et de terme initial 1.

Remarque

> Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit la suite $(e^{na})_{n\in\mathbb{N}}$.
> Si $a > 0$, alors $e^a > 1$ et donc la suite $(e^{na})_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
> Si $a < 0$, alors $e^a < 1$ et donc la suite $(e^{na})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
> Si $a = 0$, alors $e^a = 1$ et donc la suite $(e^{na})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.

Remarque

> $\forall q \in \mathbb{R}_+^*, \exists a \in \mathbb{R}$ tel que $q = e^a$. Donc la raison de toute suite géométrique de raison positive peut s'écrire en fonction de l'exponentielle. Dans le cas d'une modélisation d'un problème par une suite géométrique, on parle d'une hausse ou d'une baisse exponentielle.

Exemple

Déterminer en fonction du nombre e l'expression de la somme $\sum\limits_{k=0}^{5} e^k$

> > $\sum\limits_{k=0}^{5} e^k$ correspond à la somme des 6 premiers termes de la suite $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$. Il s'agit donc de la somme des 6 premiers termes de la suite géométrique de raison e et de terme initial 1.

> > Ainsi $\sum_{k=0}^{5} e^k = 1 \times \frac{e^6 - 1}{e - 1} = \frac{e^6 - 1}{e - 1}$.

Exemple 2

Un couple de lapins est introduit sur une île qui ne contient pas de prédateurs. On modélise la population de lapins n années après l'ontroduction par la suite $u_n = 2e^{\frac{3}{2}n}$.

1. Déterminer une estimation de la population 2 ans après l'introduction.
2. En quelle année la population de lapin aura-t-elle été multipliée par 1000?
3. Ce modèle est-il réaliste pour estimer la population de lapins au bout de 10 ans?

> > 1. $u_2 = 2e^{\frac{3}{2}\times 2} = 2e^3 \approx 40.$
> > 2. Grâce à la calculatrice, en faisant un tableau de valeur correspondant à la suite, on obtient que la population sera multiplié par 1000 au bout de 5 ans. En effet, $u_4 \approx 807$ et $u_5 \approx 3616.$
> > 3. Au bout de 10 ans, avec ce modèle, on trouve une population de 6538035 lapins, ce qui paraît improbable pour une île.