Les ensembles de nombres

Dénomination	Symbole	Définition	Exemples
nombres entiers naturels	$\mathbb{N}$	nombre positif qui s'écrit sans virgule	0 ; 2 ; 127
nombres entiers relatifs	$\mathbb{Z}$	nombre positif ou négatif qui s'écrit sans virgule	0 ; 2 ; 127 ; -37 ; -56
nombres décimaux	$\mathbb{D}$	nombre qui peut s'écrire avec une virgule	0 ; 2 ; 127 ; -37 ; -56 ; $1,327$; $-52,6438$
nombres rationnels	$\mathbb{Q}$	nombre qui peut s'écrire sous forme d'une fraction	0 ; 2 ; 127 ; -37 ; -56 ; $1,327$; $-52,6438$; $\frac{1}{3}$; $\frac{-635}{127}$; $-\frac{35}{123}$
nombres réels	$\mathbb{R}$	Tous les nombres qu'on connaît	0 ; 2 ; 127 ; -37 ; -56 ; $1,327$; $-52,6438$; $\frac{1}{3}$; $\frac{-635}{127}$; $-\frac{35}{123}$; π ; $\sqrt{3}$; $-\sqrt{7}$

Il vient donc naturellement que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$

L'ensemble des nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés les nombres irrationnels.

Règles de calcul

- En l’absence de parenthèse, lorsqu’il n’y a que des additions et des soustractions, on effectue les opérations de la gauche vers la droite.
- En l’absence de parenthèse, il faut effectuer d’abord les multiplications et les divisions puis les additions et les soustractions.
- En présence de parenthèses, on effectue d’abord les calculs entre parenthèses en commençant par les parenthèses les plus intérieures.
- Dans un calcul, lorsqu’il n’y a que des additions ou que des multiplications, les parenthèses sont inutiles.

Conventions d'écriture

- On peut supprimer le symbole de la multiplication devant une lettre ou une parenthèse.
- $1x = 1 \times x = x$

Nombres entiers

Les multiples d'un nombre entiers sont les produits de ce nombre par un entier.
Si le nombre a est un multiple du nombre b alors b est un diviseur de a.

Critères de divisibilité

par 2

Si le nombre est pair alors il est divisible par 2.

par 3

Si la somme de ses chiffres est un multiple de 3 alors le nombre est divisible par 3.

par 4

Si le nombre composé de ses deux derniers chiffres est un multiple de 4 alors le nombre est divisible par 4.

par 5

Si le nombre se termine par 0 ou 5 alors il est divisible par 5.

par 6

Si le nombre est divisible par 2 et par 3 alors il est divisible par 6.

par 9

Si la somme de ses chiffres est un multiple de 9 alors le nombre est divisible par 9.

par 10

Si le nombre finit par un 0 alors il est divisible par 10.

par 11

Si la différence entre la somme de ses chiffres de rangs pairs et la somme de ses chiffres de rangs impairs est un multiple de 11 alors le nombre est divisible par 11.

Diviseur communs à deux nombres entiers

Un diviseur commun à deux nombres entiers a et b est un nombre entier n qui divise a et b. Le PGCD de a et b est le plus grand des diviseurs communs à a et b. On le note $PGCD(a, b)$ ou $a \wedge b$.

On peut trouver le PGCD de deux nombres a et b grâce à l'algorithme d'Euclide:

- Initialisation: On divise a par b.
- Traitement: On divise le diviseur de la division précédete par son reste.
- On répète cette dernier opération jusqu'à l'obtention d'un reste nul.
- Conclusion: Le PGCD est le dernier reste non nul (ou encore le diviseur de la dernière division).

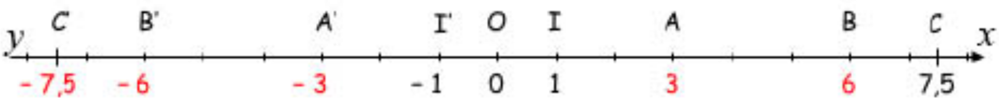
Nombres premiers entre eux

Deux nombres entiers naturels non nuls a et b sont premiers entre eux si et seulement si $PGCD(a, b) = 1$.

Propriété

> Tout nombre entier pair N peut s'écrire sous la forme $2p$ avec p un nombre entier.
> Tout nombre entier impair N peut s'écrire sous la forme $2p + 1$ avec p un nombre entier.

Droite graduée



Les abscisses des points de la demi-droite [Ox) sont appelées nombres positifs. Les abscisses des points de la demi-droite [Oy) que l'on distingue des précédentes par la présence du signe moins, sont appelées nombres négatifs.

- On appelle distance à zéro d'un nombre relatif, la distance entre l'origine et le point ayant ce nombre pour abscisse.
- Deux nombres sont opposés lorsqu'ils ont la même distance à zéro mais des signes contraires.
- Deux nombres opposés sont les abscisses de deux points symétriques par rapport à l'origine de la droite graduée.

Comparer deux nombres

- Si deux nombres sont négatifs, le plus petit est celui qui a la plus grande distance à zéro.
- Si deux nombres sont positifs, le plus petit est celui qui a la plus petite distance à zéro.
- Si deux nombres sont de signes contraires, le plus petit est le nombre négatif.

Somme de deux nombres

- Si les deux nombres sont de même signe, la somme est du signe des deux termes et est obtenue en ajoutant les distances à zéro.
- Si les deux nombres sont de signes contraires, la somme est du signe du nombre ayant la plus grande distance à zéro et est obtenue en soustrayant les distances à zéro.
- La somme de deux nombres opposés est égale à zéro.

Différence de deux nombres

Soustraire un nombre, c'est ajouter son opposé.

Produit de deux nombres

Le produit de deux nombres relatifs de même signe est positif.
Le produit de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.

Quotient de deux nombres

Diviser une quantité par un nombre, c'est la multiplier par l'inverse de ce nombre.
Le quotient de deux nombres relatifs de même signe est positif.
Le quotient de deux nombres relatifs de signes contraires est négatif.
Si deux quotients sont égaux alors les produits en croix sont égaux.

Distance de deux points sur une droite graduée

La distance de deux points sur une droite graduée est égale à la différence entre l'abscisse la plus grande et l'abscisse la plus petite de ces deux points.

La distance de deux points est toujours positive.

Les fractions

Une fraction est un quotient de deux nombres entiers a et b avec $b \in \mathbb{N}^*$. a est appelé numérateur de la fraction et b est le dénominateur de la fraction. On l'écrit $\frac{a}{b}$.

Une écriture fractionnaire est un quotient de deux nombres réels a et b avec $b \in \mathbb{R}^*$. a est appelé numérateur de l'écriture fractionnaire et b est le dénominateur de l'écriture fractionnaire. On l'écrit $\frac{a}{b}$.

Propriété:

> On ne change pas un nombre en écriture fractionnaire en multipliant ou en divisant le numérateur et le dénominateur par un même nombre non nul. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}^*$. On a:
>
> - $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$

> - $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}}$

Propriété:

> Pour ajouter ou soustraire deux fractions, il faut les mettre au même dénominateur. Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{Z}^*$. On a:
>
> - $\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$
> - $\frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}$

Propriété:

> Simplifier une fraction, c'est multiplier ou diviser le numératuer et le dénominateur par un même nombre afin que le dénominateur soit un nombre entier le plus petit possible.
> Une fraction est irréductible si son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux.
> Pour rendre une fraction irréductible, on divise le numérateur et le dénominateur par leur PGCD.
> Soient $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^*$ et $d \in \mathbb{R}^*$. On a:
>
> - $\frac{a}{c} \times \frac{b}{d} = \frac{a \times b}{c \times d}$
> - $\frac{a}{c} \times b = \frac{ab}{c} = a \times \frac{b}{c}$
> - Si de plus, $b \neq 0$, alors $\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}} = \frac{a}{c} \times \frac{d}{b}$

Les puissances d'un nombre

$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times \ldots \times a}_{n\,fois}$

L'écriture a^n se lit « a à la puissance n » ou « a exposant n ».

cas particuliers

> Soit $a \in \mathbb{R}$
>
> - $a^1 = a$
> - $a^0 = 1$
> - $0^n = 0$ avec $n \in \mathbb{N}^*$
> - 0^0 na pas de sens

Propriétés

> Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Soient $c \in \mathbb{Z}$ et $d \in \mathbb{Z}$.
>
> - $a^{-1} = \frac{1}{a}$

> - $a^{-c} = \frac{1}{a^c}$
> - $a^c \times a^d = a^{c+d}$
> - $\frac{a^c}{a^d} = a^{c-d}$
> - $a^c \times b^c = (ab)^c$
> - $\frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c$
> - $(a^c)^d = a^{cd}$