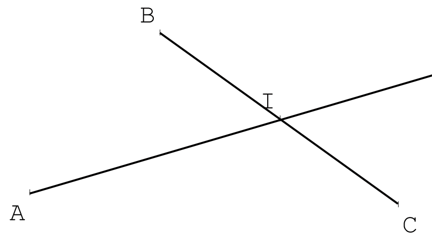
Les vecteurs

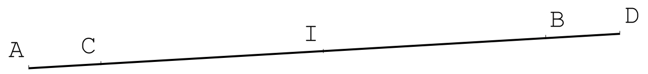
I. Translation

1. Définition

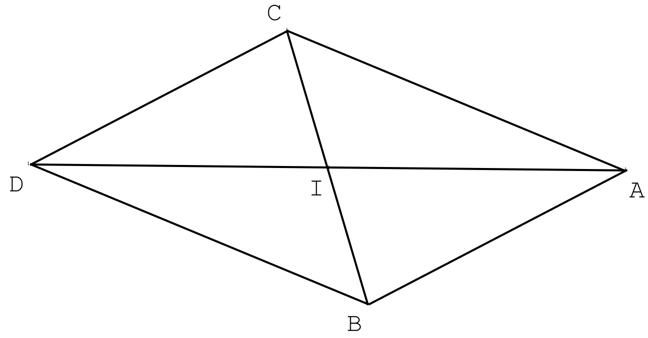
Définition 1 : Soient A et B deux points du plan. A tout point C du plan, on associe, par la translation qui transforme A en B, l'unique point D tel que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu. On dit qu'il s'agit de la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exemple :
Placer trois points du plan A, B et C.
Construire le point D, image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.





Remarque :
La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ transforme le point C en D tels que les segments $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu. Le quadrilatère ABDC est donc un parallélogramme, éventuellement aplati.



Remarque 2 :
L'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le point B.

Définition 2 : Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est caractérisé par :

- sa direction (la droite (AB))
- son sens (de A vers B)
- sa norme (la longueur AB, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$)

2. Egalité de vecteurs

Remarque 3 :
Si le point D est l'image du point C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ alors le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$. De plus, le point B est l'image du point A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. On peut donc dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux. On écrira alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Propriété 1 : Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux équivaut à dire qu'ils ont la même direction, le même sens et la même norme.

Propriété 2 : Soient A, B, C et D quatre points du plan. Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à dire que ABDC est un parallélogramme.

Propriété 3 : Soient A, B et C trois points du plan. Dire que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ équivaut à dire que B est le milieu du segment $[AC]$.

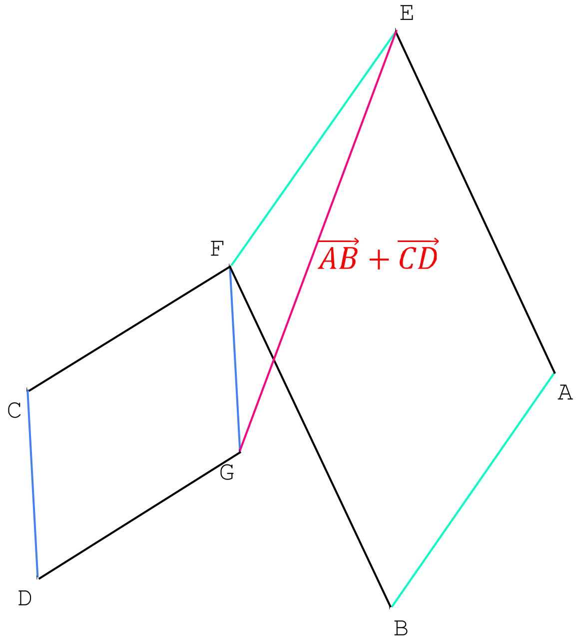
Définition 3 : Si on pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ alors on dit que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\vec{u}$.

II. Somme de vecteurs

1. Définition

Définition 4 : La somme de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchainement des translations de vecteurs $\vec{u}$ et de vecteur $\vec{v}$.

Exemple :
Soient A, B, C, D et E quatre points du plan. Construire le point F, image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$. Construire le point G, image du point F par la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$.

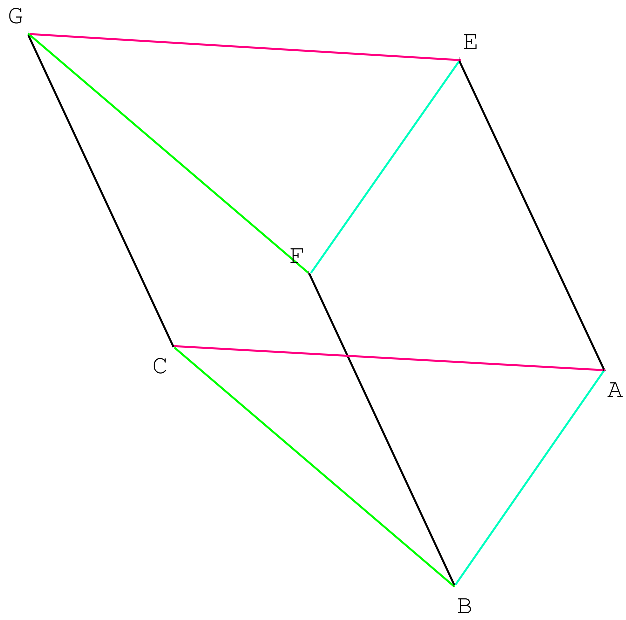


Le point G est donc l'image du point E par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.
Donc $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

2. Relation de Chasles

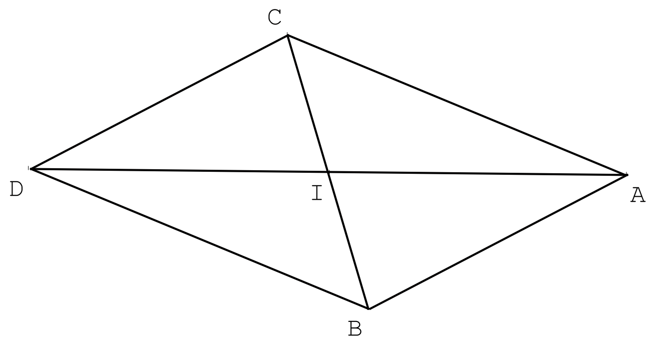
Propriété 4 : Effectuer la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ suivie de la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ revient à effectuer la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

Relation de Chasles : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$



3. Représentation du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

Propriété 5 : Soient A, B, C et D quatre points du plan. Dire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ équivaut à dire que le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.



4. Cas particuliers

Définition 5 : Pour tout point M du plan, on dit que le vecteur $\overrightarrow{MM}$ est un représentant du vecteur nul noté $\vec{0}$. On a donc $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

Définition 6 : Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. Le vecteur opposé à $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur $\overrightarrow{BA}$. On a $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Démonstration :

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{BA} = \vec{0} - \overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{AB}$

III. Colinéarité

1. Produit d'un vecteur par un nombre réel

Définition 7 : Soient un vecteur $\vec{u}$ non nul et un nombre réel k non nul. Le produit du vecteur $\vec{u}$ par k est le vecteur noté $k\vec{u}$ tel que :

- Les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont la même direction.
- Si $k > 0$ alors les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ ont le même sens et la norme du vecteur $k\vec{u}$ est le produit de k par la norme du vecteur $\vec{u}$: $\|k\vec{u}\| = k\|\vec{u}\|$.
- Si $k < 0$ alors les vecteurs $k\vec{u}$ et $\vec{u}$ sont de sens contraire et la norme du vecteur $k\vec{u}$ est le produit de $-k$ par la norme du vecteur $\vec{u}$: $\|k\vec{u}\| = -k\|\vec{u}\|$

Propriété 6 :

$k\vec{0} = \vec{0}$

$0\vec{u} = \vec{0}$

Propriété 7 :

Dire que $k\vec{u} = \vec{0}$ équivaut à dire que $k = 0$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

Propriété 8 :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et k et k' deux nombres réels.

- $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$
- $(k+k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$

2. Colinéarité

Définition 8 :

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre réel non nul k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.

Propriété 9 :

Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'ils ont la même direction.

Propriété 10 :

Soient A, B, C et D quatre points du plan. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Propriété 11 :

Soient A, B et C trois points du plan. Dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires équivaut à dire que les points A, B et C sont alignés.

Coordonnées de points et de vecteurs

On considère un repère du plan $(O\,;I\,;J)$. On pose $\vec{\imath} = \overrightarrow{OI}$ et $\vec{\jmath} = \overrightarrow{OJ}$.
Le repère sera alors noté $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$.

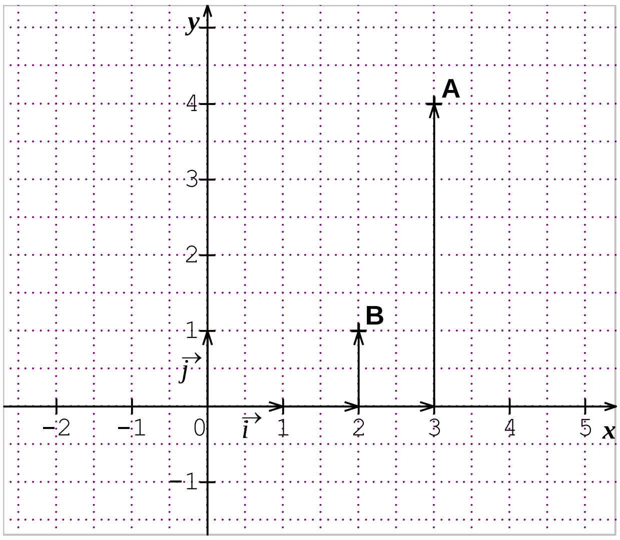
I. Coordonnées de points

1. Définition

Définition 1 :

Dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, le point M a pour coordonnées x et y si et seulement si $\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Le nombre x est appelé abscisse du point M et le nombre y est appelé ordonnées du point M.

Exemple :



On remarque que :
$\overrightarrow{OA} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ donc $A(3;4)$
$\overrightarrow{OB} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ donc $B(2;1)$

2. Distance de deux points du plan

On considère dans ce paragraphe le repère orthonormé du plan $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. c'est-à-dire le repère $(O\,;I\,;J)$ tel que le triangle OIJ soit rectangle isocèle en O.

Propriété 1 : Soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$ dans le repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$. Alors la distance entre les points A et B est $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, on a :
$A(3;4)$ et $B(2;1)$ donc
$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(3-2)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

3. Coordonnées du milieu d'un segment

Propriété 2 : Dans le repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, soient A et B deux points de coordonnées respectives $(x_A;y_A)$ et $(x_B;y_B)$.

Le point I$(x_I;y_I)$ est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si $\begin{cases} x_I = \frac{x_A+x_B}{2} \\ y_I = \frac{y_A+y_B}{2} \end{cases}$

Exemple :

Soient A et B deux points du plan de coordonnées respectives $(3; 5)$ et $(-1; 2)$ dans le repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.
Déterminer les coordonnées du point I milieu du segment $[AB]$.
On a :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2} = \dfrac{3 + (-1)}{2} = \dfrac{2}{2} = 1 \\ y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2} = \dfrac{5 + 2}{2} = \dfrac{7}{2} = 3{,}5 \end{cases}$$

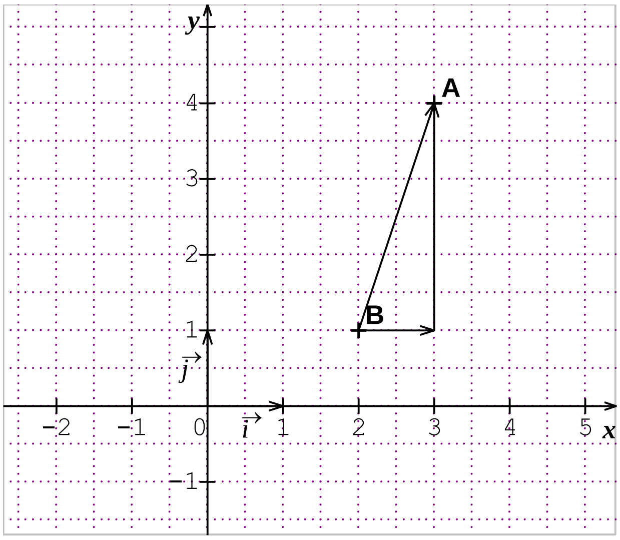
Donc les coordonnées du point I sont $I(1 ; 3{,}5)$.

II. Coordonnées d'un vecteur

1. Définition

Définition 2 : Dans un repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$, le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées a et b si et seulement si $\vec{u} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath}$. Le nombre a est appelé abscisse du vecteur $\vec{u}$ et le nombre b est appelé ordonnée du vecteur $\vec{u}$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Exemple :



Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On remarque que $\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. Egalité de vecteurs

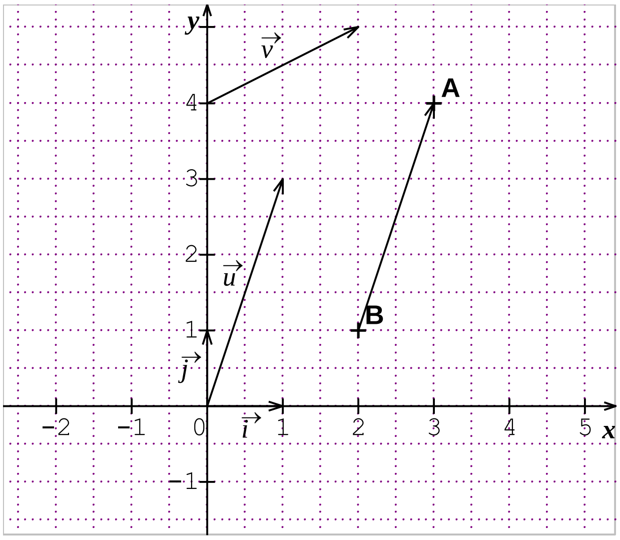
Propriété 3 : Dans un repère $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement si ils ont les mêmes coordonnées.

$\vec{u} = \vec{v}$ équivaut à $\begin{cases} x_{\vec{u}} = x_{\vec{v}} \\ y_{\vec{u}} = y_{\vec{v}} \end{cases}$

Exemple :

On considère les vecteurs ci-dessous dans le repère orthonormé $(O ; \vec{\imath} ; \vec{\jmath})$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
2. En déduire s'il y a des vecteurs égaux.



$\overrightarrow{AB} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$\vec{u} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

$\vec{v} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$ donc $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

Donc seuls les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\vec{u}$ sont égaux.

3. Coordonnées de la somme de vecteurs

Définition 3 : Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\end{pmatrix}$. Alors le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}a+a'\\b+b'\end{pmatrix}$.

Exemple :
Dans l'exemple précédent, calculer les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.
$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}1+2\\3+1\end{pmatrix}$ soit $\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

Propriété 4 :
Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$, on considère les points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$.

4. Produit d'un réel par un vecteur

Définition 4 :
Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan, on considère un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$. Soit k un nombre réel. On définit le vecteur $k\vec{u}$ comme le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}ka\\kb\end{pmatrix}$ dans le même repère.

Exemple :
Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$. Soit $\vec{u}$ le vecteur tel que $\vec{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$.

$\overrightarrow{u} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\times 5\\ \frac{1}{3}\times 3\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{5}{3}\\ 1\end{pmatrix}$.

5. Colinéarité

Propriété 5 :

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\ b'\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $ab' = a'b$.

Exemple :

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan, on a $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\ 5\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\ -2{,}5\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}1\\ 1{,}5\end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils colinéaires ? Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont-ils colinéaires ?

$4\times -2{,}5 = -10$ et $-2\times 5 = -10$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
$4\times 1{,}5 = 6$ et $1\times 5 = 5$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

6. Norme d'un vecteur

Propriété 6 :

Dans un repère $(O\,;\vec{\imath}\,;\vec{\jmath})$ du plan, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}$.

La norme du vecteur $\vec{u}$ est $\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2+b^2}$.

Exemple :

1. Quelle est la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$?
2. Soient $A(2\,;3)$ et $B(-1\,;0)$. Quelle est la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

1. $\|\vec{u}\| = \sqrt{3^2+4^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
2. $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-2\\ 0-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-3\\ -3\end{pmatrix}$ ainsi $\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$