Système d'équation linéaires

I. Equations de droites

1. Définition

Définition 1 : Dans un repère, l'ensemble des points $M(x\,;y)$ tels que $ax + by + c = 0$ avec a, b et c trois nombres réels tels que a et b ne soient pas nuls en même temps est une droite.

Définition 2 : Dans un repère, toute droite a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b et c trois nombres réels tels que a et b ne soient pas nuls en même temps.

Equations réduites : Dans un repère, toute droite a une équation réduite de la forme :

- $y = mx + p$, avec $m \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{R}$
  Le nombre m est appelé coefficient directeur de la droite et le nombre p est appelé ordonnée à l'origine.
- $x = k$, avec $k \in \mathbb{R}$

Comment déterminer l'équation réduite d'une droite passant par deux points du plan :
Dans un repère du plan, les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$.

- Si $x_A = x_B$, alors l'équation réduite de la droite (AB) est $x = x_A$.

- Si $x_A \neq x_B$, alors l'équation de la droite (AB) est de la forme $y = mx + p$. Il faut donc calculer m et p.
  On calcule dans un premier temps le coefficient directeur de la droite (AB) grâce à la formule suivante :
  $$m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$$
  Ensuite on calcule l'ordonnée à l'origine de la droite en remplaçant x et y dans l'équation par les coordonnées du point A ou du point B.
- On a ainsi trouvé les valeurs de m et p.

Exemple : Dans un repère, on a : $A(2; 3)$, $B(4; 7)$ et $C(2; -4)$.
Déterminer les équations réduites des droites (AC) puis (BC).

$x_A = x_C = 2$ donc l'équation réduite de la droite (AC) est $x = 2$.

$x_B \neq x_C$ donc l'équation réduite de la droite (BC) est de la forme $y = mx + p$.

$$m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = \frac{7 - (-4)}{4 - 2} = \frac{11}{2} = 5{,}5$$

Donc l'équation réduite de la droite (BC) est de la forme $y = 5{,}5x + p$.
Remplaçons x et y dans cette équation par les coordonnées du point C par exemple. On a alors :

$$-4 = 5{,}5 \times 2 + p$$
$$-4 = 11 + p$$
$$-4 - 11 = p$$
$$p = -15$$

L'équation réduite de la droite (BC) est $y = 5{,}5x - 15$.

2. Droites parallèles

Propriété 1 : Dans un repère du plan, deux droites d'équations respectives $x = c$ et $x = c'$ sont parallèles.

Propriété 2 : Dans un repère du plan, deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur. C'est-à-dire si et seulement si $m = m'$.

Exemple : Dans un repère, on a : $A(2;3)$, $B(4;7)$, $C(2;-4)$ et $D(0;-8)$.
Les droites (AD) et (BC) sont-elles parallèles ?

La droite (BC) a pour équation $y = 5{,}5x - 15$ d'après l'exemple précédent.
Le coefficient directeur de la droite (AD) est :

$$m = \frac{y_D - y_A}{x_D - x_A} = \frac{-8-3}{0-2} = \frac{-11}{-2} = 5{,}5$$

Dons les deux droites ont le même coefficient directeur. Elles sont donc parallèles.

Propriété 3 : Dans un repère, trois points A, B et C distincts sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.

Exemple : Dans un repère, on a : $A(2;3)$, $B(1;7)$ et $C(4;-5)$.
Les points A, B et C sont-ils alignés ?

Le coefficient directeur de la droite (AB) est :

$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{7-3}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4$$

Le coefficient directeur de la droite (AC) est :

$$m = \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{-5-3}{4-2} = \frac{-8}{2} = -4$$

Les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur. Donc les points A, B et C sont alignés.

3. Droites sécantes

Définition 2 : Deux droites qui ne sont pas parallèles sont sécantes.

Propriété 3 : Dans un repère du plan, deux droites d'équations respectives $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont sécantes si et seulement si elles n'ont pas le même coefficient directeur. C'est-à-dire si et seulement si $m \neq m'$.

Propriété 4 : Dans un repère du plan, deux droites d'équations respectives $ax + by + c = 0$ et $a'x + b'y + c' = 0$sont sécantes si et seulement si $ab' \neq a'b$ ou encore $ab' - a'b \neq 0$.

II. Résolution graphique d'un système d'équations linéaires

Un système de deux équations linéaires est un ensemble de deux équations de droite.
Résoudre graphiquement ce système, c'est trouver tous les points d'intersections de ces deux droites. Il faut donc tracer les deux droites dans le même repère.

Trois cas s'offrent à nous :

- Les droites sont sécantes : il n'y a donc qu'un point d'intersection. Le système d'équation n'admet donc qu'une seule solution constituée des coordonnées du point d'intersection des deux droites.
- Les droites sont parallèles et n'ont pas de point commun : il n'y a donc aucun point d'intersection. Le système d'équation n'a donc pas de solution.
- Les droites sont parallèles et ont au moins un point commun : il y a donc une infinité de points communs aux deux droites. Le système d'équation a donc une infinité de solutions.

III. Résolution d'un système d'équations linéaires

Soit le système de deux équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

Plusieurs étapes permettent de résoudre un système d'équations linéaires.

1. Trouver le nombre de solutions

- Si $ab' \neq a'b$ alors il y a une seule solution.

- Si $ab' = a'b$ alors il y a 0 ou une infinité de solutions.
  De plus :
  Si $cb' = c'b$ alors il y a une infinité de solutions.
  Si $cb' \neq c'b$ alors il y a 0 solution.

Exemple : Dans la suite du cours, on cherchera à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5 = 0 \\ 7x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

On a :
$ab' = 3 \times 4 = 12$ et $a'b = 7 \times 2 = 14$
Donc $ab' \neq a'b$. Ainsi il y a une seule solution.

2. Résoudre le système

Il y a deux façons de résoudre un système de deux équations linéaires.

1ère méthode : par substitution.

- On choisit une des inconnues que l'on exprime en fonction de l'autre grâce à l'une des deux équations.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5 = 0 \\ 7x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y = -3x - 5 \\ 7x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3x - 5}{2} \\ 7x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

- On la remplace par l'expression trouvée dans l'autre équation.

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3x - 5}{2} \\ 7x + 4 \times \dfrac{-3x - 5}{2} + 3 = 0 \end{cases}$$

- Cette dernière est donc maintenant une équation à une inconnue que l'on peut résoudre.

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3x-5}{2} \\ 7x + \dfrac{4}{2}(-3x-5) + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3x-5}{2} \\ 7x + 2(-3x-5) + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3x-5}{2} \\ 7x - 6x - 10 + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3x-5}{2} \\ x - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3x-5}{2} \\ x = 7 \end{cases}$$

- Une fois l'équation résolue, on remplace l'inconnue par sa valeur dans la première équation. Puis on la résout.

$$\begin{cases} y = \dfrac{-3 \times 7 - 5}{2} \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \dfrac{-26}{2} \\ x = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -13 \\ x = 7 \end{cases}$$

Il semblerait que la solution soit le couple $(7\,;-13)$

<u>2ème méthode : par combinaison</u>

- On multiplie les équations par des nombres différents afin d'obtenir une inconnue avec le même coefficient dans les deux équations.

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5 = 0 \\ 7x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y + 10 = 0 & (2 \times L_1 \rightarrow L_1) \\ 7x + 4y + 3 = 0 & (1 \times L_2 \rightarrow L_2) \end{cases}$$

- On soustrait les deux équations, tout en gardant une des deux équations.

$$\begin{cases} x \qquad\quad - 7 = 0 & (L_2 - L_1 \rightarrow L_1) \\ 7x + 4y + 3 = 0 & (1 \times L_2 \rightarrow L_2) \end{cases}$$

- On résout l'équation à une inconnue obtenue.

$$\begin{cases} x = 7 \\ 7x + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

- On remplace l'inconnue trouvée par sa valeur dans l'équation gardée. Puis on résout cette dernière.

$$\begin{cases} x = 7 \\ 7 \times 7 + 4y + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ 4y + 52 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ 4y = -52 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -\frac{52}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -13 \end{cases}$$

Il semblerait que la solution soit le couple $(7\,;-13)$

3. Vérifier que la (les) solution(s) est (sont) correcte(s)

On vérifie que le(les) couple(s) solution(s) trouvé(s) soi(en)t les bons en remplaçant les inconnues dans les équations du système de départ.

$$3x + 2y + 5 = 3 \times 7 + 2 \times (-13) + 5 = 21 - 26 + 5 = 0$$
$$7x + 4y + 3 = 7 \times 7 + 4 \times (-13) + 3 = 49 - 52 + 3 = 0$$

Les deux égalités sont vérifiées. La solution est bien le couple $(7\,;-13)$.

On peut écrire :

$$S = \{(7\,;-13)\}$$