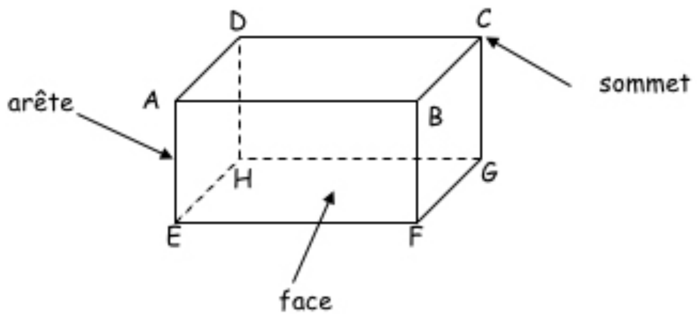
Géométrie dans l'espace

Un parallélépipède rectangle (ou pavé droit) est un solide qui possède 6 faces rectangulaires.
Il possède 8 sommets et 12 arêtes.



Propriété

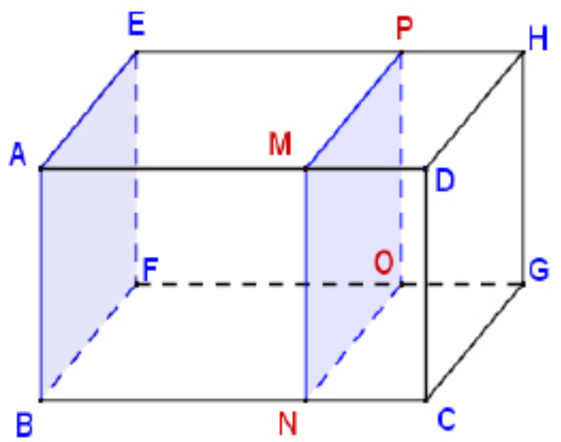
> Dans un parallélépipède rectangle:
>
> - Deux faces opposées sont parallèles et superposables.
> - Deux faces qui ont une arête commune sont perpendiculaires.

Propriété

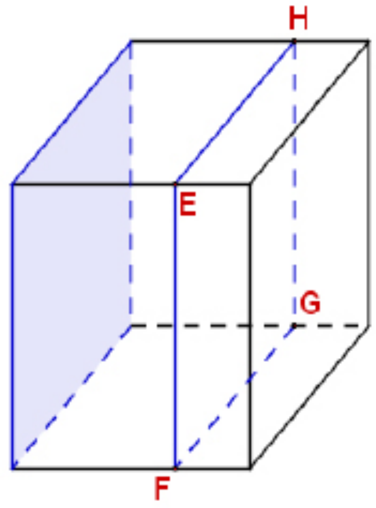
> Dans un parallélépipède rectangle, les arêtes sont quatre par quatre parallèles et de même longueur.

Un cube est un pavé droit dont les 6 faces sont carrées.
Les 12 arêtes du cube sont donc de même longueur.

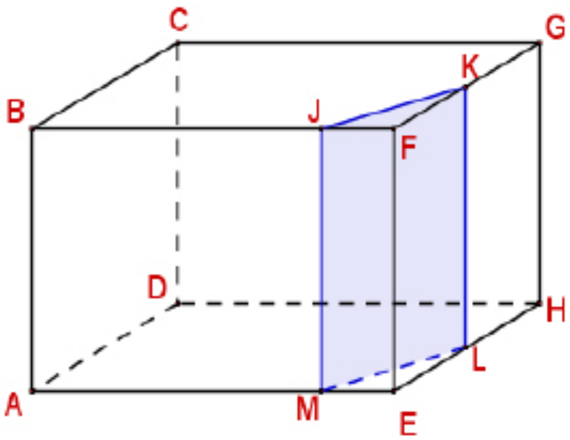
La section d’un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une face est un rectangle de même dimension que la face.



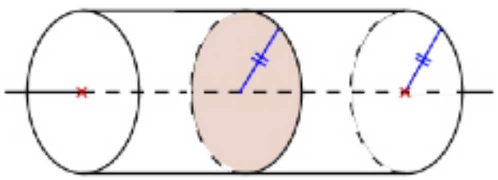
Dans le cas d’un cube, la section est un carré de côté de même longueur que l’arête du cube.



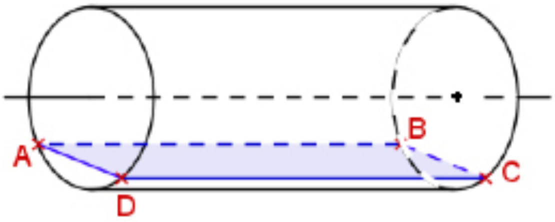
La section d'un parallélépipède rectangle par un plan parallèle à une arête est un rectangle dont l'une des dimensions est la longueur de cette arête.



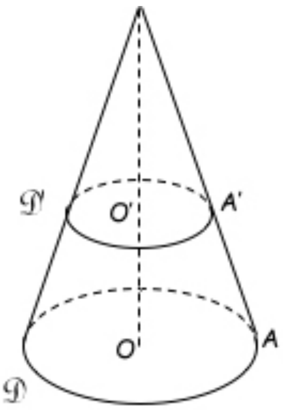
La section d'un cylindre de révolution par un plan perpendiculaire à l'axe est un cercle de même rayon que les bases du cylindre.



La section d'un cylindre de révolution par un plan parallèle à l'axe du cylindre est un rectangle dont l'une des dimensions est la hauteur du cylindre.

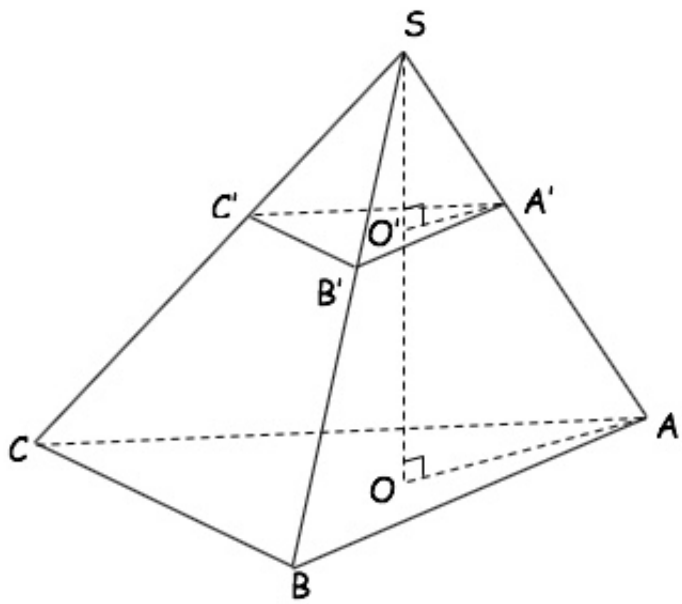


La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est une réduction du disque de base.



La section $\mathscr{D}'$ du cône par un plan parallèle à la base est une réduction du disque de base $\mathscr{D}$ à l'échelle $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{O'A'}{OA}$.
Le cône de base $\mathscr{D}'$ est une réduction du cône de base $\mathscr{D}$.

La section d'une pyramide par un plan parallèle à sa base est une réduction du polygone de base.

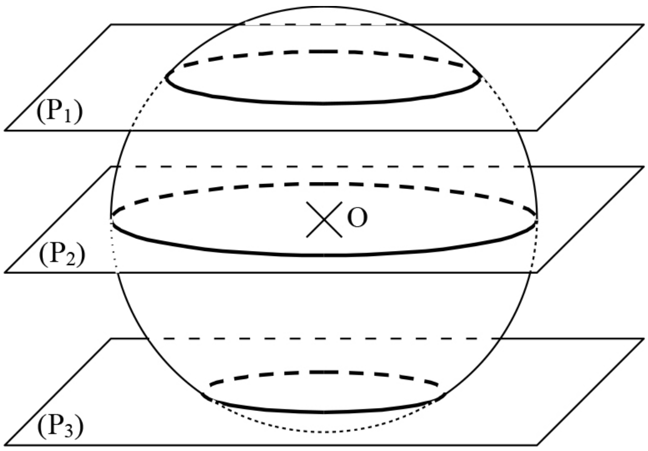


La section $\mathscr{B}'$ de la pyramide par un plan parallèle à la base est une réduction de la base $\mathscr{B}$ à l'échelle $k = \frac{SO'}{SO} = \frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \frac{O'A'}{OA} = \ldots$

La pyramide $SA'B'C'$ est une réduction de la pyramide $SABC$.

La sphère de centre O et de rayon R est constituée de tous les points M de l'espace tels que $OM = R$.
La boule de centre O et de rayon R est constituée de tous les points M de l'espace tels que $OM \leq R$.
Un diamètre d'une sphère de centre O est un segment de milieu O et d'extrémités deux points de la sphère.
Les diamètres d'une sphère ont tous la même longueur. Leur longueur commune est aussi appelée le diamètre de la sphère.
Ce vocabulaire est également valable pour les boules.

La section d'une sphère par un plan est un cercle. La section d'une boule par un plan est un disque.



Chapitre XII – Géométrie dans l'espace

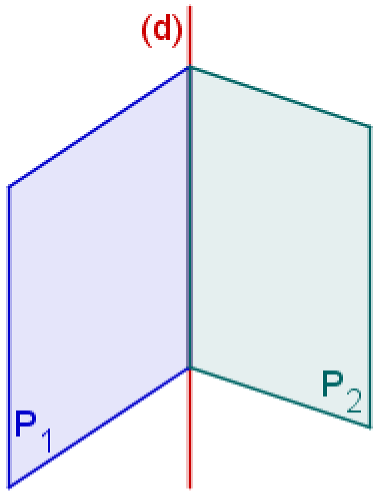
I. Positions relatives

1. Règles de base de la géométrie dans l'espace

Règle 1 :
Il existe une unique droite de l'espace passant par 2 points distincts.
Il existe un unique plan de l'espace passant par 3 points non alignés.

Remarque : une droite et un point n'appartenant pas à cette droite définissent un unique plan.

Exemple du livre ouvert



Règle 2 : lorsqu'un plan contient deux points distinct A et B, alors il contient la droite (AB).

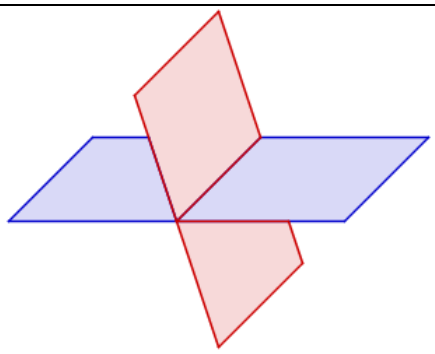
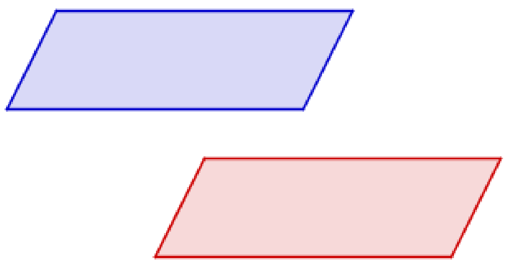
Théorème : si deux plans distincts ont 1 point commun, alors leur intersection est une droite.

Définitions :
4 points (ou plus) appartenant à un même plan sont dits coplanaires.
2 droites (ou plus) incluses dans un même plan sont dites coplanaires.

Règle 3 : quand tous les éléments d'un problème de l'espace (points ; droites…) sont coplanaires, alors toutes les règles de la géométrie plane s'appliquent (Thalès, Pythagore…).

2. Positions relatives de deux plans de l'espace

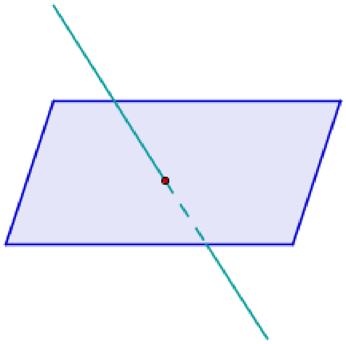
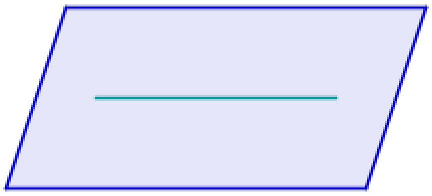
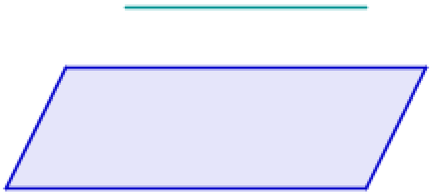
Deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ de l'espace peuvent être :

sécants	**parallèles et dans ce cas être**	
	confondus	**strictement parallèles**
		
Ils ont alors une droite de points communs.	**Tous leurs points sont communs.**	**Ils n'ont aucun point en commun.**

Le parallélisme de deux plans se note indifféremment $\mathcal{P}//\mathcal{P}'$ ou $\mathcal{P}'//\mathcal{P}$

3. Positions relatives d'une droite et d'un plan de l'espace

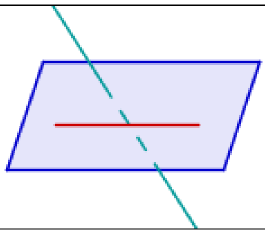
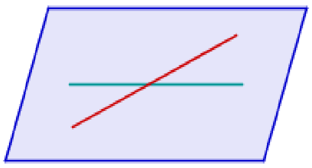
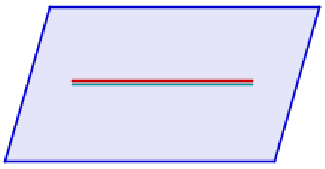
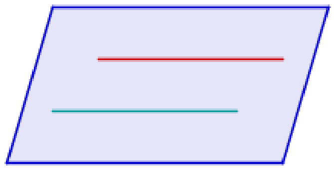
Une droite $\mathcal{D}$ de l'espace peut être :

sécant à un plan $\mathcal{P}$	**parallèle à ce plan $\mathcal{P}$ et dans ce cas être**	
	incluse dans ce plan	**strictement parallèle à ce plan**
		
Un seul point commun	**Une droite de points communs**	**Aucun point commun**

Le parallélisme d'une droite et d'un plan se note indifféremment $\mathcal{D}//\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}//\mathcal{D}$

4. Positions relatives de deux droites de l'espace

Deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ de l'espace peuvent être :

non coplanaires	**coplanaires et dans ce cas être**		
	sécantes	**parallèles et dans ce cas être**	
		confondues	**strictement parallèles**
			
Aucun point commun	**Un seul point commun**	**Tous leurs points sont communs**	**Elles n'ont aucun point commun**

Dans l'espace, deux droites coplanaires et sans point commun sont parallèles. On note $\mathcal{D}//\mathcal{D}'$ ou $\mathcal{D}'//\mathcal{D}$

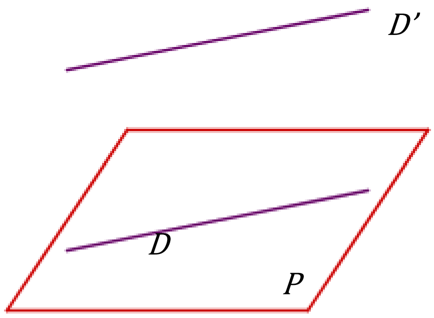
II. Parallélisme dans l'espace

1. Entre une droite et un plan

Définition : Une droite et un plan de l'espace sont parallèles s'ils ne sont pas sécants.

Propriété 1 : si un plan P contient une droite D parallèle à une droite D' alors D' est parallèle à P.

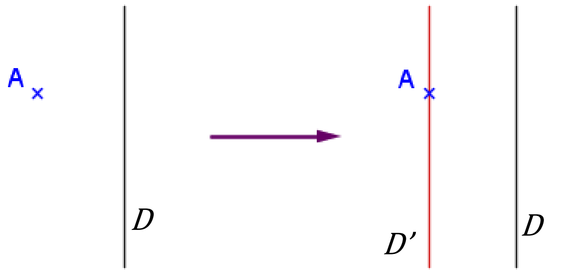
$$[D \subset P \text{ et } D'//D] \Rightarrow D'//P$$



2. Entre deux droites

Définition : Deux droites de l'espace sont parallèles si et seulement si elles sont coplanaires et non sécantes.

Propriété 2 : Soient un point A et une droite D de l'espace. Il existe une et une seule droite D' qui passe par A et qui est parallèle à D.

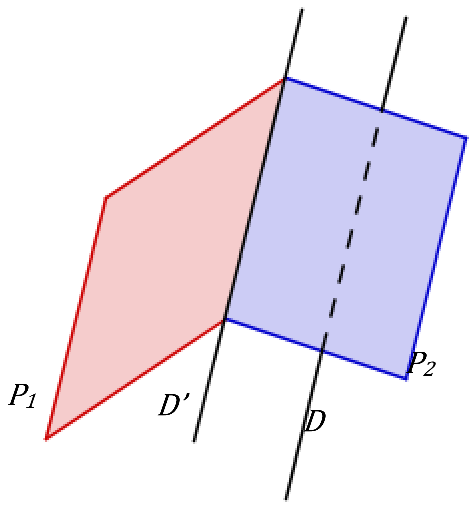


Propriété 3 : Si deux droites sont parallèles à une même troisième droite, alors elles sont parallèles entre elles.

$$[D_1//D \text{ et } D_2//D] \Rightarrow D_1//D_2$$

Propriété 4 (théorème du toit) : si une droite $\mathcal{D}$ est parallèle à deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ alors elle est parallèle à leur intersection.

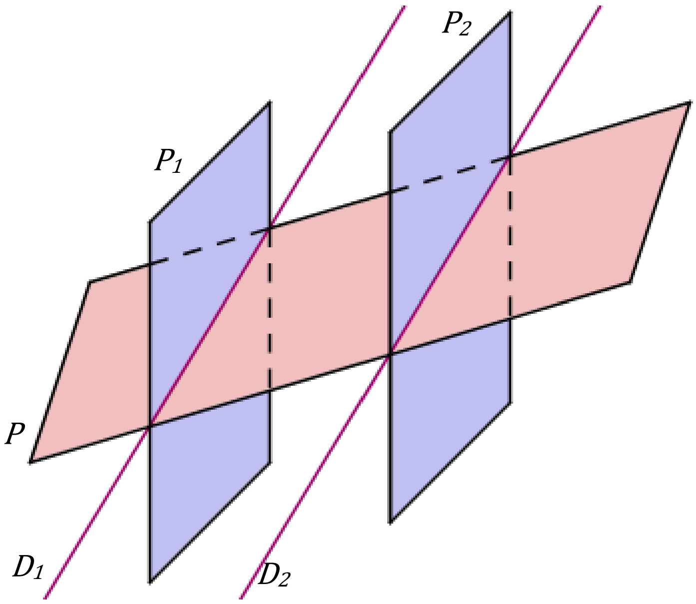
$$\left.\begin{matrix} D//P_1 \text{ et } D//P_2 \\ D' = P_1 \cap P_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow D//D'$$



Propriété 5 : si deux plans sont parallèles, alors tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.

$$[P_1//P_2 \text{ et } P_1 \cap P \neq \emptyset] \Rightarrow \begin{cases} P_1 \cap P \neq \emptyset \\ D_1//D_2 \end{cases}$$

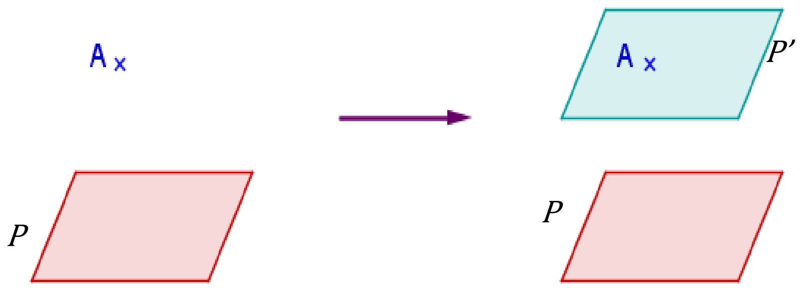
où $D_1 = P_1 \cap P$ et $D_2 = P_2 \cap P$



3. Entre deux plans

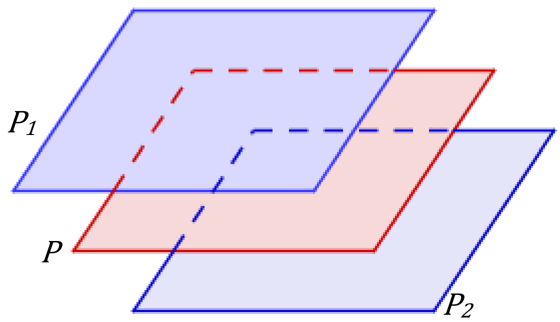
Définition : Deux plans de l'espace sont parallèles lorsqu'ils ne sont pas sécants.

Propriété 6 : Soient un point A et un plan $\mathcal{P}$ de l'espace. Il existe un et un seul plan $\mathcal{P}'$ qui passe par A et qui est parallèle à $\mathcal{P}$.



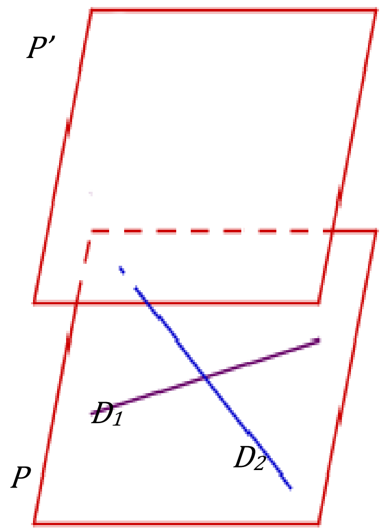
Propriété 7 : Si deux plans sont parallèles à un même troisième plan, alors ils sont parallèles entre eux.

$$[P_1//P \text{ et } P_2//P\,] \Rightarrow P_1//P_2$$



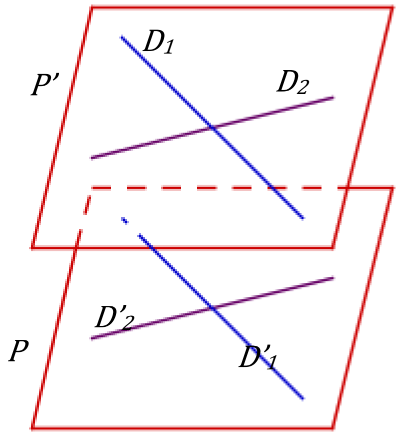
Propriété 8 : si deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ sont parallèles à un plan $\mathcal{P}'$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

$$\left.\begin{array}{l} D_1 \subset P \text{ et } D_2 \subset P \\ D_1//P' \text{et } D_2//P' \end{array}\right\} \Rightarrow P//P'$$



Propriété 9 : si deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$ sont respectivement parallèles à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}'$ alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles.

$$\left.\begin{array}{l} D_1 \subset P \text{ et } D_2 \subset P \\ D'_1 \subset P' \text{ et } D'_2 \subset P' \\ D_1//D'_1 \text{et } D_2//D'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow P//P'$$



III. Solides usuels

1. Parallélépipède rectangle ou pavé droit

Propriété 10 : L'intersection d'un pavé droit et d'un plan parallèle à une arête (non incluse dans le plan) est un rectangle.

Propriété 11 : L'intersection d'un pavé droit et d'un plan parallèle à une face est un rectangle.

2. Pyramide

Propriété 12 : L'intersection d'une pyramide et d'un plan parallèle à la base est de même nature que la base (carré, si la base est carrée, pentagone si la base est un pentagone, etc.). Cette intersection est une réduction de la base.

Propriété 13 : L'intersection d'une pyramide et d'un plan contenant la hauteur est un triangle.

3. Cône de révolution

Propriété 12 : L'intersection d'un cône de révolution et d'un plan parallèle à la base est un disque.

Propriété 13 : L'intersection d'un cône de révolution et d'un plan contenant la hauteur est un triangle.

Propriété 14 : L'intersection d'un cône de révolution et d'un plan parallèle à la hauteur, ne la contenant pas est une hyperbole.

4. Cylindre de révolution

Propriété 15 : L’intersection d’un cylindre de révolution et d’un plan parallèle à la base est un disque.

Propriété 16 : L’intersection d’un cylindre de révolution et d’un plan parallèle à la hauteur est un rectangle.

5. Sphère et boule

Propriété 17 : L’intersection d’une sphère et d’un plan est un cercle.

Propriété 18 : L’intersection d’une boule et d’un plan est un disque.