Les intervalles

Soient a et b deux nombres réels.

- L'intervalle $[a; b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x \leq b$.
- L'intervalle $[a; b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leq x < b$.
- L'intervalle $]a; b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x \leq b$.
- L'intervalle $]a; b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a < x < b$.
- L'intervalle $[a; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \geq a$.
- L'intervalle $]a; +\infty[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x > a$.
- L'intervalle $]-\infty; b]$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x \leq b$.
- L'intervalle $]-\infty; b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $x < b$.

Propriété

> Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_+$.
> $x \in [a - r, a + r] \Leftrightarrow |x - a| \leq r$

Généralités sur les fonctions

Soit une fonction $f : x \mapsto f(x)$ définie sur un intervalle I.
Soient a et b deux nombres réels tels que $f(a) = b$.
On dit que :

- b est l'image de a par la fonction f.
- a est un antécédent de b par la fonction f.

Dans un repère, l'ensemble des points de coordonnées $(x; f(x))$ constituent la représentation graphique de la fonction.

Variations d'une fonction

- Une fonction f est dite croissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tous les nombres réels a et b de l'intervalle I tels que $a < b$, on a $f(a) < f(b)$.
- Une fonction f est dite croissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tous les nombres réels a et b de l'intervalle I tels que $a < b$, on a $f(a) > f(b)$.
- Une fonction f est dite croissante sur l'intervalle I si et seulement si pour tous les nombres réels a et b de l'intervalle I tels que $a < b$, on a $f(a) = f(b)$.

Extrema locaux d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre réel de l'intervalle I.

- Dire que le nombre $f(a)$ est un maximum de f sur l'intetrvalle I signifie que pour tout réel x de l'intervalle $I, f(x) \leq f(a)$.
- Dire que le nombre $f(a)$ est un minimum de f sur l'intetrvalle I signifie que pour tout réel x de l'intervalle $I, f(x) \geq f(a)$.

Fonction affine

Une fonction affine f est le processus qui, à tout nombre x, fait correspondre le nombre $m \times x + p$ où m et p sont fixés. On la note $f : x \mapsto mx + p$.
On écrit aussi $f(x) = mx + p$.

La représentation graphique de la fonction affine est une droite.
Le nombre m est appelé coefficient directeur de la droite.
Le nombre p est appelé ordonnée à l'origine de la droite.

Si $m > 0$ alors f est croissante. Si $m < 0$ alors f est décroissante.

signe de $mx + p$

Si $m > 0$ alors:

- $\forall x \in \left]-\infty; -\frac{p}{m}\right[, mx + p < 0$
- $\forall x \in \left]-\frac{p}{m}; +\infty\right[, mx + p > 0$

Si $m < 0$ alors:

- $\forall x \in \left]-\infty; -\frac{p}{m}\right[, mx + p > 0$
- $\forall x \in \left]-\frac{p}{m}; +\infty\right[, mx + p < 0$

Fonction linéaire

Une fonction affine f est le processus qui, à tout nombre x, fait correspondre le nombre $m \times x$ où m est fixé. On la note $f : x \mapsto mx$.
On écrit aussi $f(x) = mx$.

Remarque: La fonction linéaire est un cas particulier de fonction affine: c'est le cas où $p = 0$.

La représentation graphique de la fonction linéaire est donc une droite qui passe par l'origine du repère.

Fonction valeur absolue

La valeur absolue d'un nombre réel x est le nombre noté $|x|$ défini par:

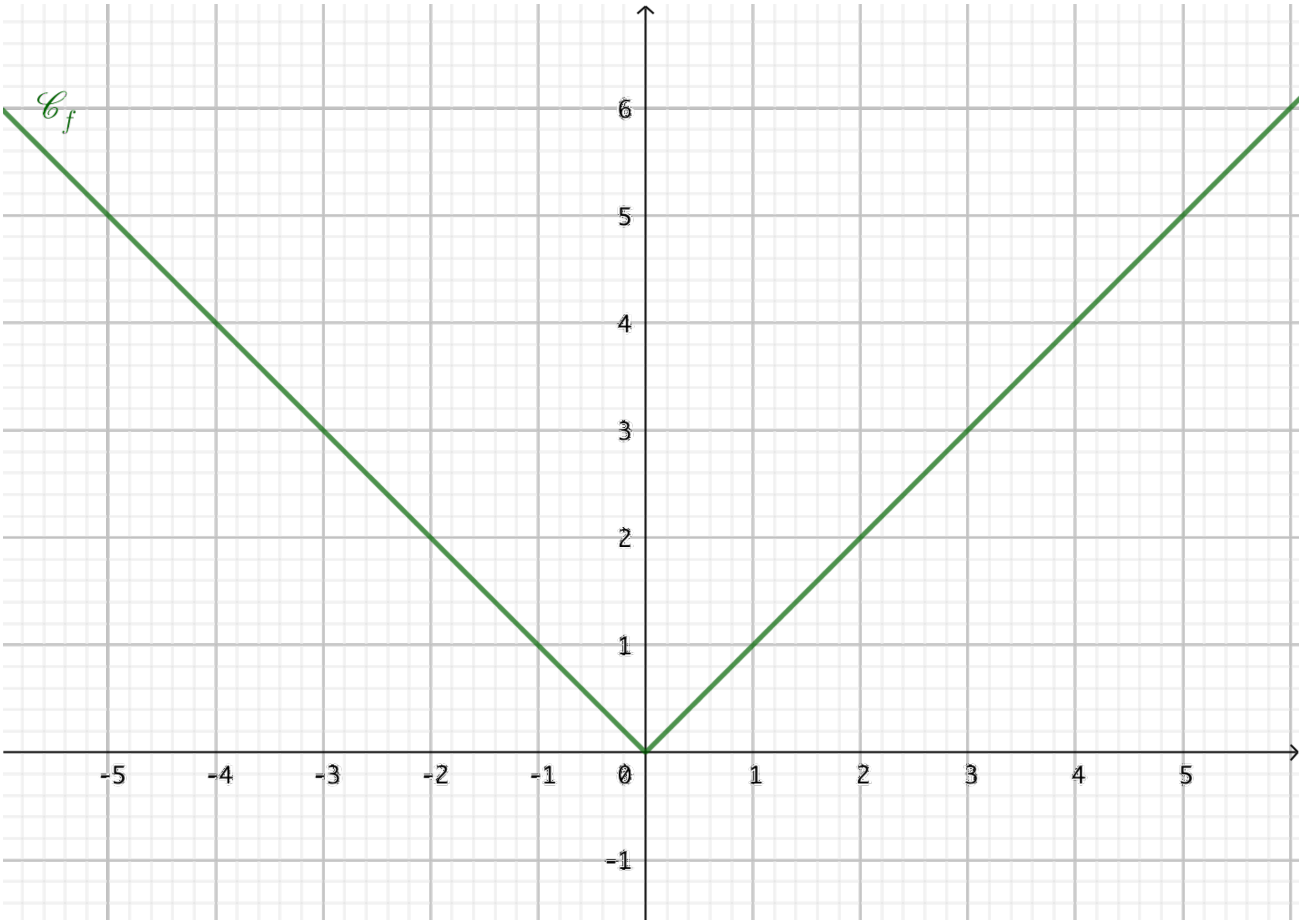
- $|x| = x$ si $x \geq 0$
- $|x| = -x$ si $x < 0$

Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}, |x| \geq 0.$

La distance de deux nombres réels a et b sur une droite graduée est égale à $|a - b|$.

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x|$ est appelée fonction valeur absolue.

Sa représentation graphique est composée de 2 demi-droite d'origine l'origine du repère.



La fonction valeur absolue est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

Propriété (variations)

$\forall a \in \mathbb{R}_-, \forall b \in \mathbb{R}_-, a < b \Leftrightarrow |a| > |b|.$
$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+, a < b \Leftrightarrow |a| < |b|.$

Fonction racine carrée

La racine carrée d'un nombre positif a est le nombre positif noté $\sqrt{a}$ dont le carré est égal au nombre a.
Le symbole $\sqrt{\ }$ s'appelle le radical.
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}_+, \sqrt{x} \geq 0$.

Propiétés

> Soient $a \in \mathbb{R}_+$ et $b \in \mathbb{R}$.
>
> - $\sqrt{a}^2 = a$
> - $\sqrt{a^2} = a$
> - $\sqrt{b^2} = |b|$

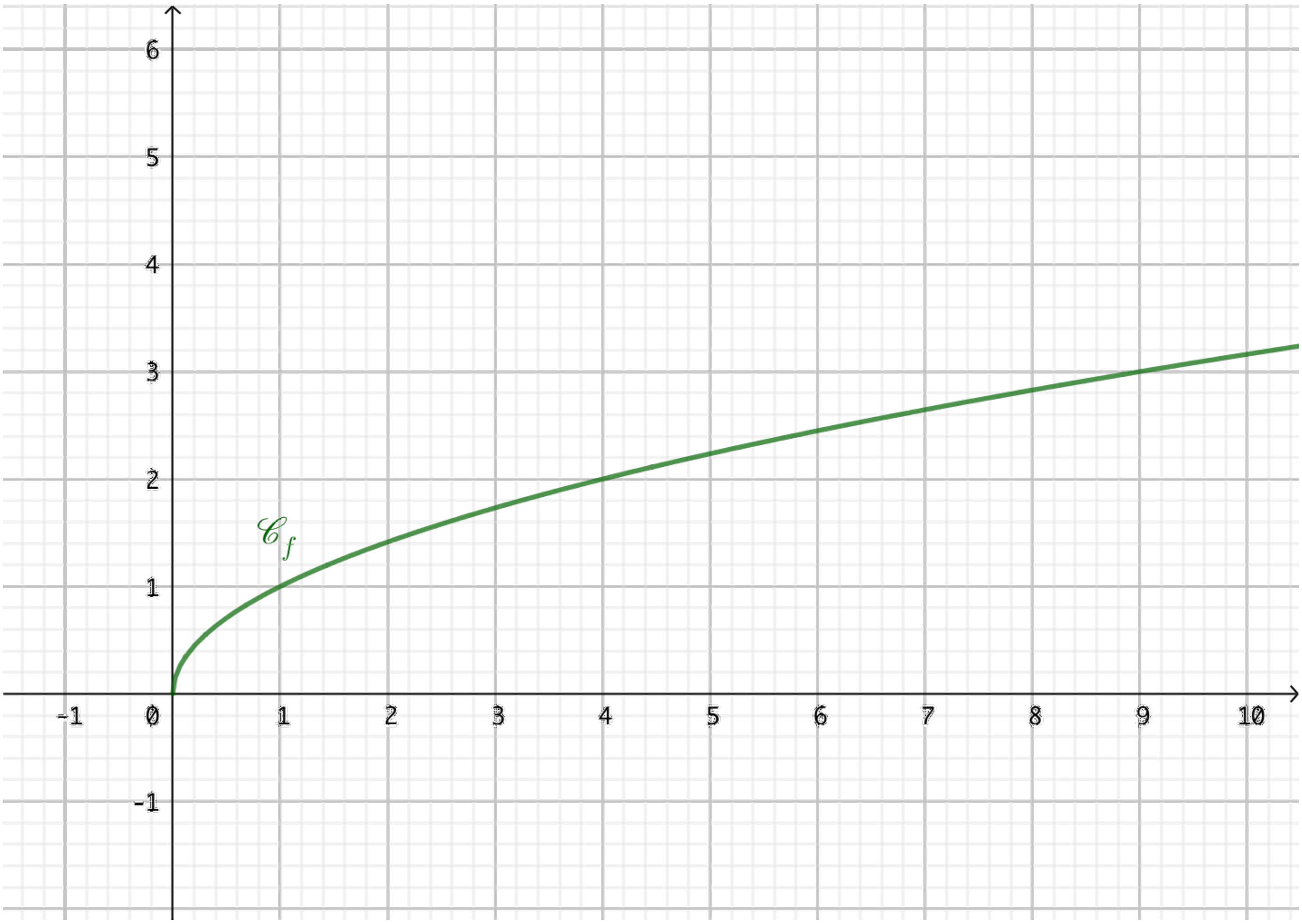
Un nombre entier positif dont la racine carrée est un nombre entier est appelé un carré parfait.

Propiétés

> Soient $a \in \mathbb{R}_+$, $b \in \mathbb{R}_+$ et $c \in \mathbb{R}_+^*$.
>
> - $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
> - $\sqrt{\frac{a}{c}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c}}$

Simplifier une racine carrée, c'est l'écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b un nombre le plus petit entier possible.

La fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$ est appelée fonction racine carrée. Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est une demi-parabole.



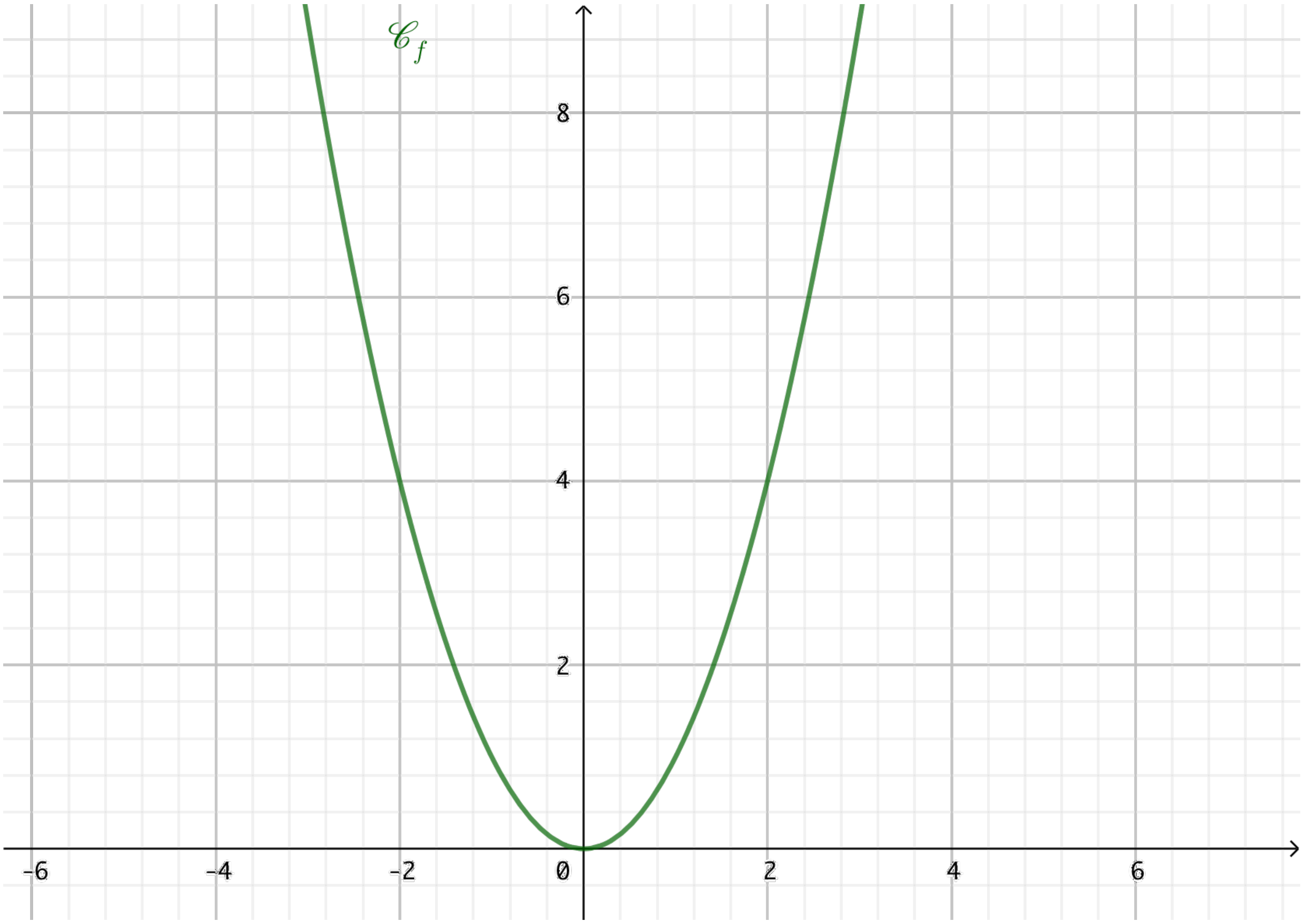
La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

Propriété (variations)

$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+, a < b \Leftrightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b}$.

Fonction carrée

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ est appelée fonction carrée. Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est une parabole de sommet l'origine du repère.



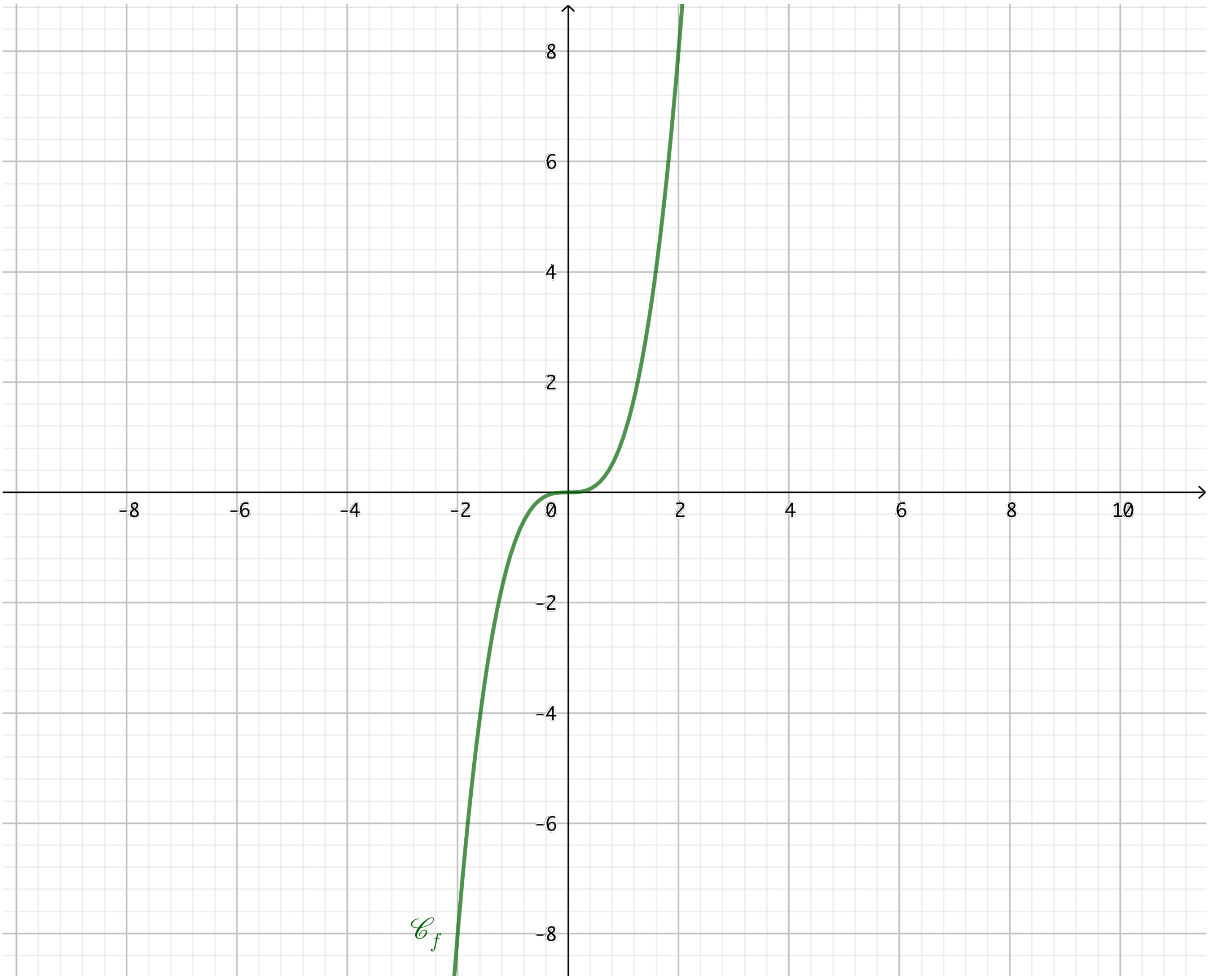
La fonction carrée est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$.

Propriété (variations)

$\forall a \in \mathbb{R}_-, \forall b \in \mathbb{R}_-, a < b \Leftrightarrow a^2 > b^2$.
$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+, a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Fonction cube

La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ est appelée fonction cube.



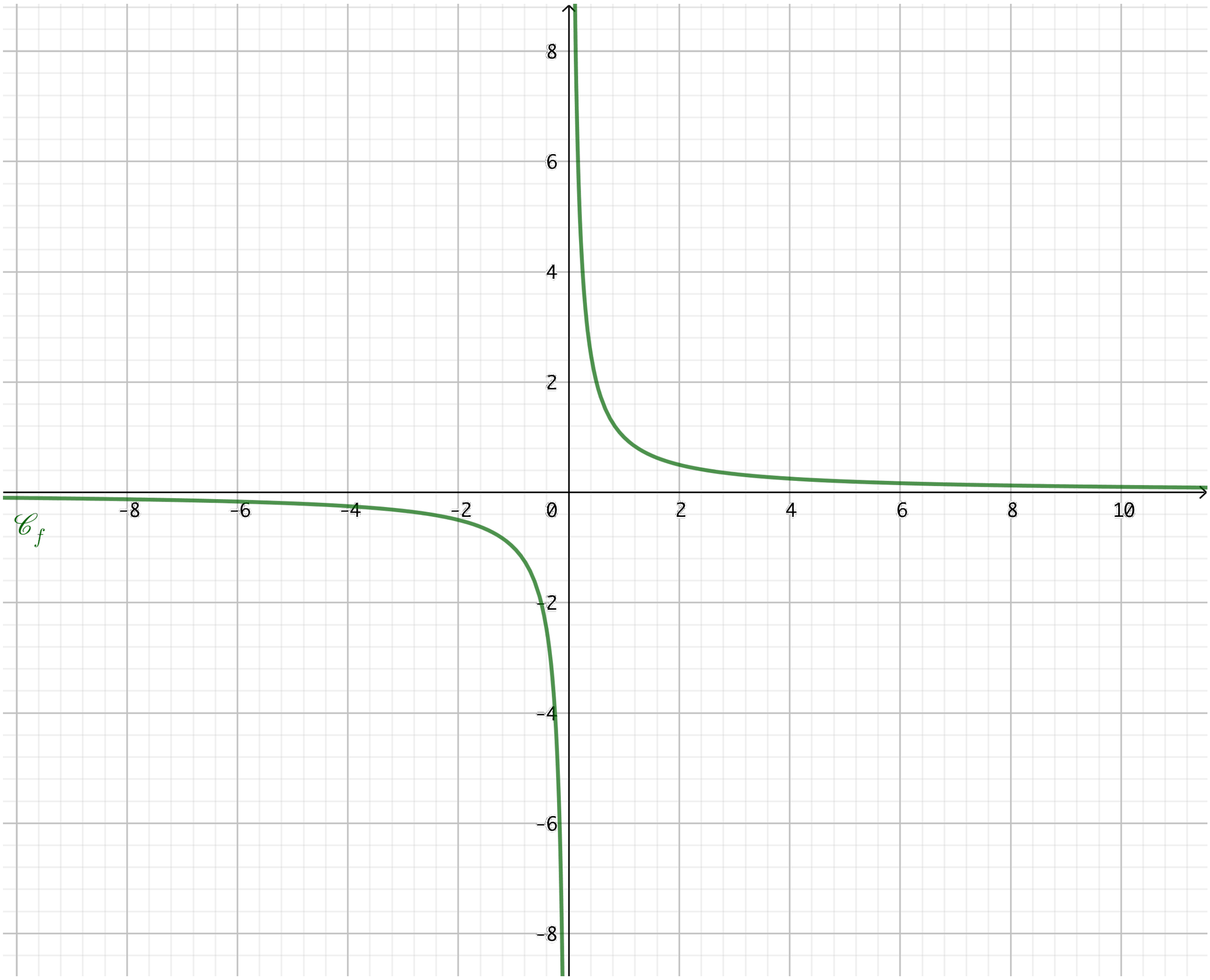
La fonction carrée est croissante sur $[-\infty; +\infty[$.

Propriété (variations)

$\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, a < b \Leftrightarrow a^3 > b^3$.

Fonction inverse

La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ est appelée fonction inverse. Sa représentation graphique dans un repère orthonormé est une hyperbole.



La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et décroissante sur $]0; +\infty[$.

Propriété (variations)

$\forall a \in \mathbb{R}_-, \forall b \in \mathbb{R}_-, a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.
$\forall a \in \mathbb{R}_+, \forall b \in \mathbb{R}_+, a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.