**Chapitre IV - Succession d'épreuves indépendantes**

- Une **expérience aléatoire** est une expérience renouvelable dont le résultat ne peut être prévu et qui , renouvelée dans des conditions identiques, ne donne pas forcément le même résultat.
- L'ensemble de toutes les issues possible d'une expérience aléatoire s'appelle l'**univers** noté $\Omega$.
- Une **issue** est un résultat de l'expérience aléatoire.
- Un **événement** est un sous-ensemble de l'univers. C'est donc un ensemble d'issues de l'univers.
- Un **événement élémentaire** est un événement constitué d'une seule issue.
- L'**événement certain** est noté $\Omega$.
- L'**événement impossible** est noté $\emptyset$.
- Soit $\mathbb{P}$ une **probabilité** alors on a :
  - $\forall A \in \Omega, 0 \leqslant \mathbb{P}(A) \leqslant 1$
  - $\mathbb{P}(\Omega) = 1$
  - $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
- Deux événements $A$ et $B$ sont **incompatibles** si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$
- L'événement **contraire** d'un événement $A$ est noté $\overline{A}$ et $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$
- $\forall A \in \Omega, \forall B \in \Omega, \mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$
- Soit $\Omega$ l'univers d'une expérience aléatoire. Une **variable aléatoire discrète** définie sur $\Omega$ est une fonction qui, à chaque issue de $\Omega$, associe un nombre réel.
- Définir la **loi de probabilité** de la variable aléatoire $X$, c'est associer à chaque valeur $x_i$ de $\Omega'$, la probabilité de l'événement $\{X = x_i\}$.
- L'**espérance** de la variable aléatoire $X$ est le nombre réel, noté $\mathbb{E}(X)$, défini par :
  $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$
- La **variance** de la variable aléatoire $X$ est le nombre réel, noté $V(X)$, défini par :
  $V(X) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i(x_i - \mathbb{E}(X))^2$
  $V(X) = p_1(x_1 - \mathbb{E}(X))^2 + p_2(x_2 - \mathbb{E}(X))^2 + ... + p_n(x_n - \mathbb{E}(X))^2$
  $V(X) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^2\right) - (\mathbb{E}(X))^2$
  V(X)= $p_1x_1^2 + p2x_2^2 + ... + p_nx_n^2 - (\mathbb{E}(X))^2$
- L'**écart type** de la variable aléatoire $X$ est le nombre réel, noté $\sigma(X)$, défini par :
  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$
- Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui ne comporte que deux issues, l'une est appelée succès ($S$) et l'autre échec ($\overline{S}$).
- On considère une épreuve de Bernoulli.
  Soit $p(0 \leqslant p \leqslant 1)$ la probabilité d'obtenir un succès.
  $X$ est la variable aléatoire qui prend la valeur 1 en cas de succès et 0 en cas d'échec.
  La loi de probabilité de $X$, présentée dans le tableau ci-dessous, est appelée loi de Bernoulli de paramètre $p$.

| $k$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $\mathbb{P}(X = k)$ | $1 - p$ | $p$ |

  On peut écrire $X \sim \mathcal{B}(p)$
  Auquel cas :
  $\mathbb{E}(X) = p$
  $\mathbb{V}(X) = p(1 - p)$
  $\sigma(X) = \sqrt{p(1 - p)}$
- **Propriété :** Lors d'une succession de $n$ épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue $(x_1, x_2, ..., x_n)$ est égale à :
  $$\mathbb{P}(x_1, x_2, ..., x_n) = \mathbb{P}(x_1) \times \mathbb{P}(x_2) \times .. \times \mathbb{P}(x_n)$$
- Un **schéma de Bernoulli** est une répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
- On représente à l'aide d'un arbre un schéma de Bernoulli, répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.
  Pour tout entier $k$, $0 \leqslant k \leqslant n$, le nombre de chemins réalisant $k$ succès est noté $\binom{n}{k}$, qui se lit « $k$ parmi $n$ ».
  Ces nombres sont appelés **coefficients binomiaux**.
- **Propriété :** $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$,
  $(a + b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
- On considère un schéma de Bernoulli, répétition de $n$ épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de même paramètre $p$. On note $X$ la variable aléatoire qui associe à cette répétition de $n$ épreuves le nombre de succès.
  La loi de probabilité de $X$ est appelée **loi binomiale** de paramètre $n$ et $p$.
  On note $X \sim \mathcal{B}(n; p)$.
  Auquel cas :
  $$\forall k \in \mathbb{N} | 0 \leqslant k \leqslant n, \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$$
  $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall p \in [0; 1], \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k} = 1$$
  $$\mathbb{E}(X) = np$$
  $$V(X) = np(1 - p)$$
  $$\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$$
  Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit $k' \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k' \leqslant n$.
  $$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(X = i)$$
  $$\mathbb{P}(X \leqslant k) = \mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1) + ... + \mathbb{P}(X = k)$$
  $$\mathbb{P}(k \leqslant X \leqslant k') = \mathbb{P}(X \leqslant k') - \mathbb{P}(X \leqslant k - 1)$$