Chapitre I - Les suites
Résumé

I. Raisonnement par récurrence

Raisonnement par récurrence : Si une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang 0 et si $\mathcal{P}(k)$ vraie $\implies$ $\mathcal{P}(k+1)$ alors $\mathcal{P}(n)$ est toujours vraie.
Raisonnement par récurrence à partir d'un certain rang :
Si une propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie au rang n_0 et si $\mathcal{P}(k)$ vraie $\implies$ $\mathcal{P}(k+1)$ alors $\mathcal{P}(n)$ est toujours vraie à partir du rang n_0.
Inégalité de Bernoulli : $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, \forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geqslant 1 + na$

II. Limites de suites

Limite infinie :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
$\iff$ $(\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \in [A, +\infty[)$
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
$\iff$ $(\forall A \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant n_0 \implies u_n \in]-\infty; A])$

Soit $k \in \mathbb{R}$.

- Si $k > 0$ alors les suites (kn), (kn^2), $(k\sqrt{n})$ et (ke^n) divergent vers $+\infty$.
- Si $k < 0$ alors les suites (kn), (kn^2), $(k\sqrt{n})$ et (ke^n) divergent vers $-\infty$.

Limite finie :
$\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell \in \mathbb{R}$
$\iff$ ($\forall I$ intervalle ouvert tel que $\ell \in I, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}$,
$n \geqslant n_0 \implies u_n \in I$)

Soit $k \in \mathbb{R}$.
Les suites $\left(\frac{k}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{k}{n^2}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(ke^{-n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers 0.

Sans limite : Il existe des suites sans limite. On dit qu'elles divergent.

Limite et comparaison :

- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n < v_n$.
  Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$
- Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n$.
  On a alors :
  - si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = +\infty$
  - si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = -\infty$
- Théorème des gendarmes : Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si :
  - à partir d'un certain rang, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$
  - $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n = \lim\limits_{n \mapsto +\infty} w_n = \ell$

  Alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = \ell$

Convergence d'une suite :
Toute suite croissante et majorée converge.
Toute suite décroissante et minorée converge.
Toute suite croissante et non majorée diverge.
Toute suite décroissante et non minorée diverge.

Suite (q^n) : Soit $q \in \mathbb{R}$.

- Si $q \leqslant -1$ alors (q^n) n'a pas de limite.
- Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 1$.
- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$.

La suite (e^n) diverge vers $+\infty$.
La suite (e^{-n}) converge vers 0.

Somme de deux limites

Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Et si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n + v_n =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit de deux limites

Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n =$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n \times v_n =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Quotient de deux limites
Cas où $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n \neq 0$

Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
Et si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n =$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\ell' > 0$	$\ell' < 0$	$\pm\infty$
alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Cas où $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n = 0$

Si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} u_n =$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} v_n =$	0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$	0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0$	0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 0$	0 avec $\forall n \in \mathbb{N}, v_n < 0$	0
alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \frac{u_n}{v_n} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI