Chapitre II - Limites de fonctions
Résumé

Limite infinie en l'infini :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \iff (\forall A\in\mathbb{R}, \exists a\in[x_0;+\infty[, \forall x\in[x_0;+\infty[, x\geqslant a \implies f(x)\in[A;+\infty[)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists a\in[x_0;+\infty[, \forall x\in[x_0;+\infty[, (x\geqslant a \implies f(x)\leqslant A)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists a\in]-\infty, x_0], \forall x\in]-\infty, x_0], (x\leqslant a \implies f(x)\geqslant A)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \iff \forall A\in\mathbb{R}, \exists a\in]-\infty, x_0], \forall x\in]-\infty, x_0], (x\leqslant a \implies f(x)\leqslant A)$

Limite finie en l'infini :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \iff \forall I$ intervalle ouvert contenant ℓ, $\exists a\in[x_0;+\infty[, \forall x\in[x_0;+\infty[, (x\geqslant a \implies f(x)\in I)$

Limite infinie en un nombre réel :

$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = +\infty \iff (\forall A\in\mathbb{R}, \exists a\in[x_0;b[, \forall x\in[x_0;b[, x\geqslant a \implies f(x)\in[A;+\infty[)$

$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x) = -\infty \iff (\forall A\in\mathbb{R}, \exists a\in[x_0;b[, \forall x\in[x_0;b[, x\geqslant a \implies f(x)\leqslant A)$

$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x) = +\infty \iff (\forall A\in\mathbb{R}, \exists a\in]b;x_0], \forall x\in]b;x_0], x\leqslant a \implies f(x)\geqslant A)$

$\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x) = -\infty \iff (\forall A\in\mathbb{R}, \exists a\in]b;x_0], \forall x\in]b;x_0], x\leqslant a \implies f(x)\leqslant A)$

Limite finie en un nombre réel :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell \iff \begin{pmatrix}\forall J \text{ intervalle ouvert tel que } \ell\in J,\\ \exists K \text{ un intervalle tel que } a\in K,\\ \forall x\in I, (x\in K \implies f(x)\in J)\end{pmatrix}$$

Asymptotes : Une asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ est une droite vers laquelle se rapproche $\mathcal{C}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell\in\mathbb{R} \implies$ la droite d'équation $y=\ell$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \ell\in\mathbb{R} \implies$ la droite d'équation $y=\ell$ est une asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$

Théorème de minoration : Soient f et g deux fonctions telles que pour x proche de a, $f(x)\leqslant g(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$.

Théorème de majoration : Soient f et g deux fonctions telles que pour x proche de a, $f(x)\leqslant g(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.

Théorème d'encadrement, dit des gendarmes : Soient f, g et h trois fonctions telles que pour x proche de a, $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$.
Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = \ell$ alors $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \ell$.

Limite et composition de fonctions :Soient f une fonction définie sur un intervalle I et g une fonction définie sur un intervalle J telles que $\forall x\in I, f(x)\in J$. Soit a in I et $b=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si $\lim\limits_{X\to b} g(X)$ existe alors $\lim\limits_{x\to a} g(f(x)) = \lim\limits_{X\to b} g(X)$

- Fonction racine carrée
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$
- Fonction carrée
  $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
- Fonction cube
  $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$

- Fonction puissance
  Soit $n\in\mathbb{Z}$.
  Si $n>0$ et pair alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$
  Si $n>0$ et impair alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$
  Si $n<0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = 0$
  Si $n=0$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = 1$

- Fonction inverse
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$
- Fonction exponentielle
  $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
  $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
  $\forall n\in\mathbb{Z}$:
  $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
  $\lim\limits_{n\to-\infty} x^n e^x = 0$

- Fonction racine carrée
  $\lim\limits_{x\to0} \sqrt{x} = 0$
- Fonction inverse
  $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$
  $\lim\limits_{\substack{x\to0\\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$

Somme de limites

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)+g(x) =$	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI	$-\infty$

Produit de limites

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	$\ell>0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} f(x)\times g(x) =$	$\ell\times\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Quotient de limites

Cas où $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$

Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) =$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$
Et si $\lim\limits_{x\to a} g(x) =$	$\ell'\neq0$	$+\infty$ ou $-\infty$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$\ell'>0$	$\ell'<0$	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Cas où $\lim\limits_{x\mapsto a} g(x) = 0$

Si $\lim\limits_{x\mapsto a} f(x) =$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	$\ell>0$ ou $+\infty$	$\ell<0$ ou $-\infty$	0
Et si $\lim\limits_{x\mapsto a} g(x) =$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)>0$	0 avec $g(x)<0$	0 avec $g(x)<0$	0
Alors $\lim\limits_{x\mapsto a} \frac{f(x)}{g(x)} =$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI