

Chapitre III - Combinatoire et dénombrement

Ensemble fini : ensemble qui possède un nombre fini d'éléments.

Cardinal d'un ensemble fini E : noté $\text{card}(E)$, nombre d'éléments qui composent E .

Ensembles disjoints : E et F sont disjoints si $E \cap F = \emptyset$.

Propriété : Soient E_1, E_2, \dots, E_p p ensembles finis deux à deux disjoints.

$$\text{card}(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_p) = \text{card}(E_1) + \text{card}(E_2) + \dots + \text{card}(E_p)$$

$$\text{card}\left(\bigcup_{i=1}^p E_i\right) = \sum_{i=1}^p \text{card}(E_i)$$

p -uplet : Un p -uplet est une collection ordonnée de p objets.

propriété : Soient E_1, E_2, \dots, E_p p ensembles.

- Le produit cartésien de E_1 par E_2 , noté $E_1 \times E_2$ est l'ensemble des couples $(a; b)$ où $a \in E_1$ et $b \in E_2$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des triplets $(a; b; c)$ où $a \in E_1, b \in E_2$ et $c \in E_3$.
- Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p$ est l'ensemble des p -uplets $(a_1; a_2; \dots; a_p)$ où $a_1 \in E_1, a_2 \in E_2, \dots, a_p \in E_p$.
- On notera E^k le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{k \text{ fois}}$

Propriété : Soient E_1, E_2, \dots, E_p p ensembles finis.

$$\text{card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_p) = \text{card}(E_1) \times \text{card}(E_2) \times \dots \times \text{card}(E_p)$$

$$\text{card}\left(\prod_{i=1}^p E_i\right) = \prod_{i=1}^p \text{card}(E_i)$$

Propriété : Soit E un ensemble fini de cardinal n . Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de k -uplets de l'ensemble E est : $\text{card}(E^k) = n^k$

Factorielle d'un entier naturel : Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle factorielle du nombre n , noté $n!$, le nombre $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Par convention, on pose $0! = 1$.

Propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*, n = n \times (n - 1)!$

Arrangement : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Un arrangement de E est un p -uplet d'éléments distincts de E .

Remarque : L'ordre compte pour les arrangements.

Propriété : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $p \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Le nombre d'arrangements de p éléments de E est $n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n-p)!}$

Permutation : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Une permutation de E est un arrangement des n éléments de E .

Remarque : L'ordre compte pour les permutations.

Propriété : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Le nombre de permutations de E est $n!$

Sous-ensemble : Soit E un ensemble. Soit A un ensemble.

A est un sous-ensemble (ou une partie) de E si tous les éléments de A sont dans E .

On note alors $A \subset E$

Combinaison : Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Une combinaison de p éléments de E est un sous-ensemble de E possédant p éléments.

Remarque : L'ordre ne compte pas pour les combinaisons.

Propriété : Soit E un ensemble fini de cardinal n .

Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$.

Le nombre de combinaisons de E possédant p éléments, noté

$$\binom{n}{p}, \text{ est } \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

$\binom{n}{p}$ est appelé coefficient binomial et se lit « p parmi n ».

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{l} \bullet \binom{n}{0} = 1 \\ \bullet \binom{n}{n} = 1 \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} \bullet \binom{n}{1} = n \\ \bullet \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \end{array} \right.$$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leq p \leq n$.

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

Propriété : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p \leq n$.

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Triangle de Pascal :

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	1	1				
2	1	2	1			
3	1	3	3	1		
4	1	4	6	4	1	
5	1	5	10	10	5	1

Propriété : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \mathbb{N} | 0 < k \leq n, k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$

Propriété : Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

Le nombre de sous-ensembles de E est $\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n$.

On a donc $\text{card}\mathcal{P}(E) = 2^n$

Soit E un ensemble fini tel que $\text{card}E = n \in \mathbb{N}$.

On tire p éléments de E , avec $0 \leq p \leq n$.

Type	Les éléments sont tirés	L'ordre	Remise	Remarque	Nombre de tels types
p -uplets	successivement	compte	avec		n^p
Arrangements	successivement	compte	sans		$\frac{n!}{(n-p)!}$
Permutations	successivement	compte	sans	On prend tous les éléments de E	$n!$
Combinaisons	simultanément	ne compte pas			$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$