

Chapitre V - Continuité des fonctions d'une variable réelle

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Soit $a \in I$.

La fonction f est continue en a si et seulement si pour tout intervalle ouvert J contenant $f(a)$, il existe un intervalle ouvert I' contenant a tel que pour tout x appartenant à I' , $f(x)$ appartient à J . **Propriété :** f est continue en $a \iff$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

$x \in I$

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

f est continue sur I si et seulement si pour tout nombre a de l'intervalle I , f est continue en a .

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

Soit $a \in I$.

- Si f est dérivable en a alors f est continue en a .
- Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Remarques :

- Les fonctions polynômes sont continues sur \mathbb{R} .
- La fonction exponentielle est continue sur \mathbb{R} .
- La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$.
- Toute fonction définie sur un intervalle I et obtenue par opérations ou composition à partir des fonctions précédentes est continue sur I .

Définition : Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I tel que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

L'**image de la suite** (u_n) par la fonction f est la suite $(f(u_n))$.

Propriété : Soit (u_n) une suite convergente vers un réel ℓ .

Soit I un intervalle tel que $\ell \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

Pour toute fonction f définie sur I et continue en ℓ , la suite $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$.

Théorème du point fixe : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé I telle que $f(I) \subset I$.

Soit (u_n) une suite définie par son premier terme $u_0 \in I$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

On a alors :

- $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$
- Si la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Théorème des valeurs intermédiaires : Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Soient a et b deux nombres réels de l'intervalle I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[a; b]$.

Théorème de la bijection : Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans l'intervalle $[a; b]$.