Chapitre VI - Vecteurs, droites et plans de l'espace

Définition : A tout couple (A, B) de points de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$, où $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur associé à la translation qui transforme A en B.
Un vecteur de l'espace $\overrightarrow{AB}$ est défini par sa direction (la droite (AB)), son sens (de A vers B) et sa norme (la longueur AB, notée $\|\overrightarrow{AB}\|$).
Remarque : La translation qui transforme un point A en lui-même est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est appelé vecteur nul et est noté $\overrightarrow{0}$.
On a donc $\|\overrightarrow{0}\| = 0$.
Propriété : Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
Remarque : Le vecteur nul n'a ni direction ni sens.
Définition : Si deux vecteurs sont égaux alors on dit que l'un est un représentant de l'autre.
Définition : Soient $\overrightarrow{u}$ un vecteur de l'espace et A et B deux points de l'espace.
On appelle opposé du vecteur $\overrightarrow{u}$ le vecteur, noté $-\overrightarrow{u}$, de même direction, de même norme mais de sens opposé.
Si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ alors $-\overrightarrow{u} = \overrightarrow{BA}$
Propriété : Soient A, B, C et D quatre points de l'espace.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).
Définition : Soit ABCD un parallélogramme.
La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$$

Relation de Chasles : Soient A, B et C trois points de l'espace.
La somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$ est le vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Propriété : Soient A et B deux points de l'espace. Soit $\lambda \in \mathbb{R}^*$.
Le produit de λ par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur noté $\lambda\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{AB}$ et $\lambda\overrightarrow{AB}$ ont la même direction.
$\|\lambda\overrightarrow{AB}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{AB}\|$.

- Si $\lambda > 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\lambda\overrightarrow{AB}$ sont de même sens. Si $\lambda < 0$ alors $\overrightarrow{AB}$ et $\lambda\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires.

Remarque : Soit $\overrightarrow{u}$ un vercteur de l'espace.
$0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$
Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient λ et μ deux nombres réels.

- $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$
- $(\lambda + \mu)\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{u}$
- $\lambda(\mu\overrightarrow{u}) = (\lambda\mu)\overrightarrow{u}$

Définition : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ des nombres réels. Soient $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}$ des vecteurs de l'espace.
Tout vecteur de la forme $\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} + ... + \lambda_n\overrightarrow{u_n}$ est appelé combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, ..., \overrightarrow{u_n}$. **Définition :** Deux vecteurs de l'espace $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{u}$.
Remarque : Le vecteur nul est donc colinéaire à n'importe quel vecteur de l'espace puisque pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de l'espace, on a $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u}$
Propriété : Deux vecteurs non nuls sont colinéaires si et seulement si ils ont la même direction.

Propriété : Trois points de l'espace A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
Définition : Soient A et B deux points de l'espace.
La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est alors un vecteur directeur de la droite (AB).

$$(AB) = \left\{M | \exists\lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB}\right\}$$

Remarque : On peut donc définir une droite par un point A et un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. On peut alors la noter $d(A, \overrightarrow{u})$.
Ainsi $M \in d(A, \overrightarrow{u}) \iff \exists\lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}$
Ou encore $d(A, \overrightarrow{u}) = \left\{M | \exists\lambda \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{u}\right\}$
Définition : Soient A, B et C trois points de l'espace non alignés.
Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont appelés vecteurs directeurs du plan (ABC).

$$(ABC) = \left\{M | \exists\lambda \in \mathbb{R}, \exists\mu \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}\right\}$$

Remarque : On peut donc définir un plan par un point A et deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires. On peut alors la noter $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
Ainsi $M \in \mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \iff \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}$
Ou encore $\mathcal{P}(A, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \left\{M | \exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{u} + y\overrightarrow{v}\right\}$
Définition : Quatre points A, B, C et D qui sont dans le même plan sont dit coplanaires.
Définition : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Soient O, A, B et C quatre points de l'espace tels que $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{w}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si les points O, A, B et C sont coplanaires.
Propriété : Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace.
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si le vecteur $\overrightarrow{w}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
Autrement dit :
Les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{w} = \lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}$.
Remarque : Le vecteur nul est coplanaire avec n'importe quel couple de vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ car $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{u} + 0\overrightarrow{v}$
Définition : On appelle base de l'espace un triplet $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ de vecteurs non coplanaires et deux à deux non colinéaires.
Définition : Un repère de l'espace est composé d'un point O et d'une base $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
On le note $\left(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$.
Remarque :

- Si les droites $d(O, \overrightarrow{i})$, $d(O, \overrightarrow{j})$ et $d(O, \overrightarrow{k})$ sont perpendiculaires deux à deux alors le repère est orthogonal.
- Si, de plus, les vecteurs $\|\overrightarrow{i}\| = \|\overrightarrow{j}\| = \|\overrightarrow{k}\| = 1$, alors le repère est orthonormé.

Définition et propriété : Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ une base de l'espace.
Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$, il existe un unique triplet $(x; y; z)$ de nombres réels tel que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$.
Ce triplet $(x; y; z)$ est appelé coordonnées du vecteur $\overrightarrow{u}$.
On note $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Remarque : Dans une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a :

- $\vec{0}\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$
- $\vec{i}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$
- $\vec{j}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$
- $\vec{k}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Propriété : Soit une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace dont les coordonnées respectives dans cette base ont $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ avec x, x', y, y', z et z' six nombres réels.
Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a :

- $(\vec{u}+\vec{v})\begin{pmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{pmatrix}$
- $(\lambda\vec{u})\begin{pmatrix}\lambda x\\\lambda y\\\lambda z\end{pmatrix}$

Définition : Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.
Soit M un point de l'espace.
Si il existe trois réels x, y et z tels que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ alors $(x; y; z)$ sont les coordonnées du point M dans le repère $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.
x est appelé abscisse, y ordonnée et z la cote du point M dans ce repère.

Propriété : Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.
Soient A et B des points de l'espaces de coordonnées respectives dans ce repère $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$ avec x_A, x_B, y_A, y_B, z_A et z_B six nombres réels.

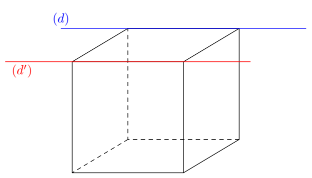
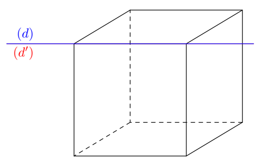
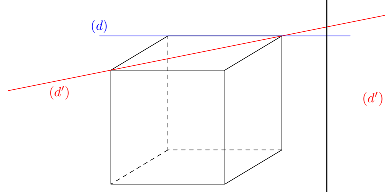
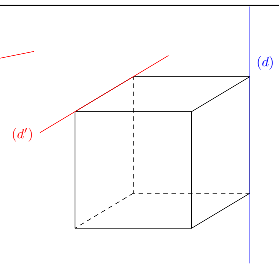
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$
- Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont $\left(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2}\right)$
- Deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Définition : Soit $\left(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.
Soient $A(x_A; y_A; z_A)$ un point de l'espace et $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur non nul de l'espace.
Pour tout point $M(x; y; z)$ de la droite $d(A; \vec{u})$, il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que :

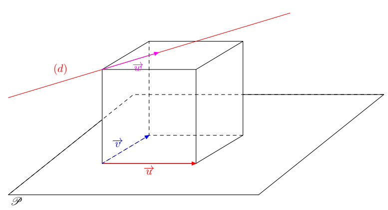
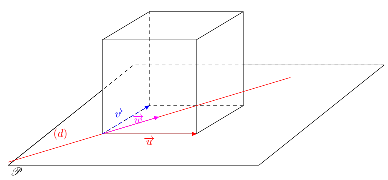
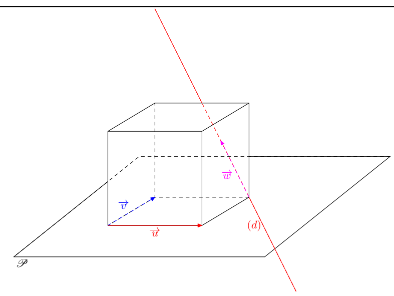
$$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = zA + ct \end{cases}$$

Ce système est appelé représentation paramétrique de la droite (d)

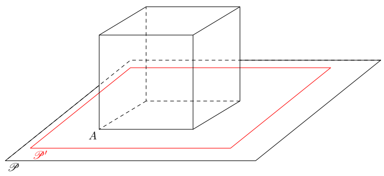
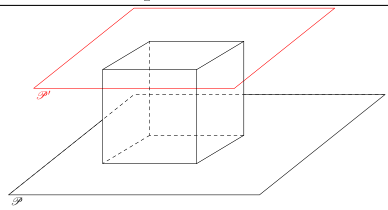
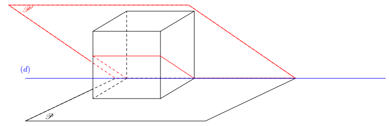
Soient (d) et (d') deux droites de vecteur directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{u'}$.

$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ sont colinéaires		$\vec{u}$ et $\vec{u'}$ ne sont pas colinéaires	
(d) et (d') sont coplanaires et strictement parallèles	(d) et (d') sont coplanaires et confondues	(d) et (d') sont coplanaires et sécantes	(d) et (d') sont non coplanaires
			

Soient (d) une droite de l'espace de vecteur directeurs $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de l'espace de vecteurs directeurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires		$\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires
La droite (d) et le plan $\mathcal{P}$ Sont strictement parallèles	La droite (d) est incluse dans le plan $\mathcal{P}$	La droite (d) et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants
		

Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans de l'espace.

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont même direction		$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ n'ont pas la même direction
$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ont (au moins) un point commun	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$n'ont pas de point commun $\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants
Les plans sont confondus	Les plans sont strictement parallèles	L'intersection est une droite
		
$A \in \mathcal{P}$ et $A \in \mathcal{P}'$	Les points du plans $\mathcal{P}$ n'appartiennent pas au plan $\mathcal{P}'$	$(d) = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$

Théorème du toit : Soient $\mathcal{D}$ une droite et $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans de l'espace.
Si $\mathcal{D}$ est parallèles aux deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ alors elle est aussi parallèle à leur intersection.

$$\begin{cases} \mathcal{D}//\mathcal{P}_1 \\ \mathcal{D}//\mathcal{P}_2 \\ \mathcal{D}' = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_1 \end{cases} \Longrightarrow \mathcal{D}//\mathcal{D}'$$

Propriété Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans parallèles de l'espace.
Tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droties d'intersections sont parallèles.

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1//\mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_1 \neq \emptyset \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \mathcal{P}_2//\mathcal{P} \neq \emptyset \\ \mathcal{D}_1//\mathcal{D}_2 \end{cases} \text{ où } \mathcal{D}_1 = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_1 \text{ et } \mathcal{D}_2 = \mathcal{P} \cap \mathcal{P}_2$$