Chapitre VII - Complément sur la dérivation

définition : Soient I et J deux intervalles. Soit u une fonction définie sur I telle que $\forall x \in I, u(x) \in J$. Soit v une fonction définie sur J.
Alors la fonction composée de v par u, notée $v \circ u$, est la fonction définie sur I par $v \circ u(x) = v(u(x))$.

théorème : Soient a, b et c trois nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
Si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = b$ et $\lim\limits_{X \to b} v(X) = c$ alors $\lim\limits_{x \to a} v \circ u(x) = c$

théorème : Soient I et J deux intervalles. Soit u une fonction définie sur I et dérivable en $a \in I$, telle que $\forall x \in I, u(x) \in J$. Soit v une fonction définie sur J et dérivable en $b = u(a) \in J$.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable en a et
$(v \circ u)'(a) = u'(a) \times (v' \circ u)(a) = u'(a) \times v'(u(a))$.

théorème : Soient I et J deux intervalles. Soit u une fonction dérivable sur I, telle que $\forall x \in I, u(x) \in J$. Soit v une fonction dérivable sur J.
Alors la fonction $v \circ u$ est dérivable sur I et
$\forall x \in I, (v \circ u)'(x) = u'(x) \times (v' \circ u)(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
La fonction f est convexe sur l'intervalle I si $\mathcal{C}_f$ est située en-dessous de chacune de ses cordes.

définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.
La fonction f est concave sur l'intervalle I si $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de chacune de ses cordes.

théorème : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est concave si et seulement si f' est décroissante sur I.
La fonction f est concave si et seulement si $\mathcal{C}_f$ est située en-dessous de chacune de ses tangentes.

définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Si sa dérivée f' est elle-même dérivable sur I, on dit que f est deux fois dérivable.
La dérivée de f' est notée f'' et est appelée dérivée seconde de f.

théorème : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est convexe sur I si et seulement si
$\forall x \in I, f''(x) \geqslant 0$
La fonction f est concave sur I si et seulement si
$\forall x \in I, f''(x) \leqslant 0$

remarque : Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I.
$\forall x \in I, f''(x) \geqslant 0 \iff$ la fonction f est convexe sur $I \iff$ la courbe représentative de f est au-dessus de ses tangentes.
$\forall x \in I, f''(x) \leqslant 0 \iff$ la fonction f est concave sur $I \iff$ la courbe représentative de f est en-dessous de ses tangentes.

définition : Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé. Soit $A \in \mathcal{C}_f$.
Le point A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si et seulement si la tangente à $\mathcal{C}_f$ en A traverse $\mathcal{C}_f$.

remarque : Si $A(a; f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ alors sa tangente en A est au-dessus de $\mathcal{C}_f$ d'un côté de A et en-dessous de $\mathcal{C}_f$ de l'autre côté.
Autrement dit, A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si f change de convexité en a.
Autrement dit, si f est deux fois dérivable, A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ si f'' change de signe en a.

propriété : Soit f une fonction convexe sur un intervalle I.
$\forall a \in I, \forall b \in I, \forall t \in [0; 1], f(ta + (1-t)b) \leqslant tf(a) + (1-t)f(b)$