Chapitre VIII - Orthogonalité dans l'espace

Définition : Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. Soient A, B et C trois points de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ soit des représentants des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Le produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$, noté $\vec{u}.\vec{v}$, est égal au produit scalaire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.

Remarque : Dans la Définition précédente, les points A, B et C sont dans le plan (ABC). Donc les Propriétés du produit scalaire dans l'espace sont les mêmes que dans le plan.
$\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$
En appelant H le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), on a $\vec{u}.\vec{v} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AH}$

Propriété : Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. Soit $k \in \mathbb{R}$.
$\vec{u}^2 = \vec{u}.\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$
$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$
$\vec{u}.(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}.\vec{v} + \vec{u}.\vec{w}$
$k(\vec{u}.\vec{v}) = (k\vec{u}).\vec{v} = \vec{u}.(k\vec{v})$
$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$
$(\vec{u} - \vec{v})(\vec{u} + \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$
$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right)$

Définition : Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Remarque : Le vecteur $\vec{0}$ est donc orthogonal à tout autre vecteur.

Définition : Deux droites (d) et (d') de l'espace sont orthogonales s'il existe une droite parallèle à (d) qui est perpendiculaire à (d').

Propriété : Soient (d) et (d') deux droites de l'espace de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Les droites (d) et (d') sont orthogonales si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$.

Propriété : Si deux droites sont parallèles alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.
Si deux droites sont orthogonales alors toute parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.

Définition : Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Propriété : Soit la droite (d) dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Soit le plan $\mathcal{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{w}$ non colinéaires. (d) est orthogonale à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\vec{u}.\vec{v} = 0$ et $\vec{u}.\vec{w} = 0$.

Propriété : Une droite (d) est orthogonale à un plan $\mathcal{P}$ si et seulement si elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Définition : Soit $\mathcal{P}$ un plan dirigé par deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Tout vecteur non nul $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est appelé vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

Propriété : Soit A un point de l'espace. Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan passant par A de vecteur normal $\vec{n}$.

Remarque : On peut donc définir un plan par la donnée d'un point et d'un vecteur normal.

Définition : Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point de l'espace. Il existe une unique droite (d) orthogonale au plan $\mathcal{P}$ passant par le point A. La droite (d) coupe le plan $\mathcal{P}$ en un unique point H appelé projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$.

Définition : Soit (d) une droite de l'espace et A un point de l'espace. Il existe une unique droite (d') perpendiculaire à la droite (d) passant par le point A. La droite (d') coupe la droite (d) en un unique point H appelé projeté orthogonal du point A sur la droite (d).

Propriété : Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point de l'espace. Soit H le projeté orthogonal du poin A sur le plan $\mathcal{P}$. H est le point de $\mathcal{P}$ le plus proche de A.

Propriété : Soit $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point de l'espace. Soit H le projeté orthogonal du point A sur le plan $\mathcal{P}$. Soit $\vec{n}$ un vecteur normal du plan $\mathcal{P}$. Pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, on a $AH = \frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$

Propriété : Soit (d) une droite de l'espace. Soit A un point de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de A sur (d). Le point H est le point de (d) le plus proche de A.

Propriété : Soit (d) une droite de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit B un point de la droite (d). Soit A un point de l'espace. Soit H le projeté orthogonal de A sur (d). La distance de A à (d) est la distance AH avec $AH^2 = AB^2 - \left(\frac{\overrightarrow{BA}.\vec{u}}{\|\vec{u}\|}\right)^2$

Définition : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Si $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$ et si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ alors la base $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dite orthonormée et le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthonormé.

Propriété : Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormé. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace dont les coordonnées sont données dans cette base. Alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Propriété : Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormé. Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace dont les coordonnées sont données dans cette base. Alors $\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Propriété : Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé. Dans ce repère, on considère deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$. On a $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Propriété : On munit l'espace d'un repère orthonormé.
Un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.
Cette équation est appelée équation cartésienne du plan.
a, b, c, d étant quatre nombres réels tels que a, b et c sont non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.