**Chapitre IX - logarithme néperien**

**Définition :** La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$ qui, à tout réel $x>0$, associe l'unique solution de l'equation $e^y=x$, d'inconnue $y$. On note $y=\ln(x)$.

**Propriété :**

- $\ln(1)=0$
- $\ln(e)=1$
- $\ln\left(\frac{1}{e}\right)=-1$
- $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \forall y\in\mathbb{R}, (e^y=x \iff y=\ln(x))$
- $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, e^{\ln(x)}=x$
- $\forall x\in\mathbb{R}, \ln(e^x)=x$

**Propriété :** La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, \ln'(x)=\frac{1}{x}$.

**Propriété :** La fonction logarithme népérien est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Propriété :** Soit $u$ une fonction dérivable sur un intervalle $I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction $f$ définie sur l'intervalle $I$ par $f(x)=\ln(u(x))$ est dérivable et $\forall x\in I, f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$

**Propriété :**

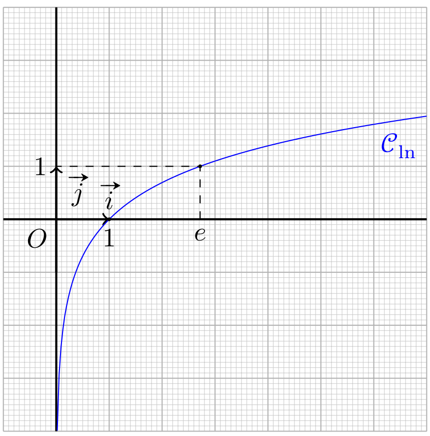
- $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x)=-\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty$

**Propriété :** La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Remarques :**

| $x$ | $0$ | $1$ | $e$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $\ln'(x)$ | | $+$ | | |
| ln | $-\infty$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |

- $\ln(a)=\ln(b) \iff a=b$
- $\ln(a)<\ln(b) \iff a<b$
- $\ln(a)>0 \iff a>1$
- $\ln(a)<0 \iff a<1$




**Propriété :** Pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs, on a

- $\ln(a)+\ln(b)=\ln(ab)$
- $\ln(a)-\ln(b)=\ln\left(\frac{a}{b}\right)$
- $-\ln(b)=\ln\left(\frac{1}{b}\right)$
- $\ln(a^n)=n\ln(a)$

**Propriété :** Croissances comparées

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0$
- $\forall n\in\mathbb{N}^*, \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=0$
- $\lim\limits_{x\to 0}x\ln(x)=0$
- $\forall n\in\mathbb{N}^*, \lim\limits_{x\to 0}x^n\ln(x)=0$

**Propriété :** $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\ln(1+h)}{h}=1$

**Propriété :** Soit $a\in\mathbb{R}$.
L'équation $\ln(x)=a$ admet une unique solution $x_0$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

**Propriété :** Soit $a\in\mathbb{R}$. Soit $b\in\mathbb{R}_+^*$.

- L'inéquation $\ln(x)>a$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]e^a;+\infty[$.
- L'inéquation $\ln(x)<a$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]-\infty;e^a[$.
- L'inéquation $\ln(x)\geqslant a$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $[e^a;+\infty[$.
- L'inéquation $\ln(x)\leqslant a$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]-\infty;e^a]$.
- L'inéquation $e^x>b$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]\ln(b);+\infty[$.
- L'inéquation $e^x<b$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]-\infty;\ln(b)[$.
- L'inéquation $e^x\geqslant b$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $[\ln(b);+\infty[$.
- L'inéquation $e^x\leqslant b$ admet pour solutions l'ensemble des réels de l'intervalle $]-\infty;\ln(b)]$.