Chapitre X - Primitives

Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. On appelle primitive de la fonction f, toute fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

théoreme : Soit I un intervalle. Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I.

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit F une primitive de la fonction f sur I.
Soit G une fonction dérivable sur I.
G est une primitive de $f \iff \exists c \in \mathbb{R}, \forall x \in I, G(x) = F(x) + c$

Propriété : Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit $x_0 \in I$. Soit $y \in \mathbb{R}$.
Il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I. Soient F et G les primitives sur I respectivement de f et g. Soit $k \in \mathbb{R}$.

- $F + G$ est une primitive de $f + g$
- $F - G$ est une primitive de $f - g$
- kF est une primitive de kf

Propriété : Soient u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J.
Soit v une fonction dérivable sur l'intervalle J.
Une primitive sur I de la fonction $u' \times (v' \circ u)$ est $v \circ u$.

Propriété : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit F une primitive de f sur I.
Dans le tableau ci-dessous, c est un réel.

Si $f(x) =$	Alors $F(x) =$	I
k avec $k \in \mathbb{r}$	$kx + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2$	$\mathbb{R}$
x^n avec $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0; -1\}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$ si $n > 0$ $]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$ sir $n \leqslant 2$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + c$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0; +\infty[$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$	$\mathbb{R}$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$

Propriété : Soit f des fonctions définies sur un intervalle I. Soit F une primitive de f. Soit u une fonction dérivable sur I.
Dans le tableau ci-dessous, c est un réel.

Si $f(x) =$	Alors $F(x) =$	Remarques
$u'(x)(u(x))^n$ avec $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0; 1\}$	$\frac{1}{n+1}(u(x))^{n+1} + c$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$ si $n \leqslant 2$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + c$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$\frac{u'(x)}{(u(x))^2}$	$-\frac{1}{u(x)} + c$	$\forall x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$	$\forall x \in I, u(x) > 0$
$u'(x)\sin(u(x))$	$-\cos(u(x)) + c$	
$u'(x)\cos(u(x))$	$-\sin(u(x)) + c$	
$u'(x)e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	