Chapitre XII - Calcul intégral

Définition : Soit un repère orthogonal $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$. L'unité d'aire, notée u.a., est l'aire du rectangle $OIKJ$ où $K(1;1)$.
Définition : Soit $\mathcal{C}$ une courbe représentative dans un repère orthogonal $\left(O;\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ}\right)$ d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et $a<b$. Le domaine délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$ est appelé aire sous la courbe $\mathcal{C}$. L'aire, exprimée en u.a., du domaine situé sous la courbe $\mathcal{C}$ est appelé intégrale de a à b de la fonction f. Elle est notée $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.
Remarque et Propriétés :

- Pour toute fonction f continue et positive sur l'intervalle $[a;b]$, avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et $a<b$, $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ne dépend que de f et de $[a;b]$. Il est indépendant du choix des unités sur les axes.
- On dit que x est une variable muette car elle ne se retrouve pas dans le résultat. On peut donc noter indifféremment $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\mathrm{d}u = ...$
- $$\int_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$$
- On peut parfois profiter de l'invariance de l'aire par translation ou symétrie pour calculer une intégrale.

Théorème : Soit f une fonction continue positive sur un intervalle I. Soit $a\in I$. La fonction $F_a : x\in I\mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonciton f sur I telle que $F_a(a)=0$.
Propriété : Soit F une primitive d'une fonction f continue positive sur l'intervalle I. Soient $a\in I$ et $b\in I$. On a $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ que l'on note aussi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.
Théorème : Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.
Théorème : Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit $a\in I$. La fonction $F_a : x\in I\mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est la primitive de la fonciton f sur I telle que $F_a(a)=0$.
Propriété (linéarité de l'intégrale) : Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I. Soient $a\in I$ et $b\in I$. On a :

- $\int_a^b (f+g)(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$
- $\forall\lambda\in\mathbb{R}, \int_a^b (\lambda f)(x)\mathrm{d}x = \lambda\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$

Propriété (relation de Chasles) : Soit f et g deux fonctions continues sur l'intervalle I. Pour tout réels c, d, e de l'intervalle I, on a $\int_c^d f(x)\mathrm{d}x + \int_d^e f(x)\mathrm{d}x = \int_c^e f(x)\mathrm{d}x$
Propriété : Soit f une fonction continue sur l'intervalle I. Soient $a\in I$ et $b\in I$. On a $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
Propriété : Pour toute primitive F d'une fonction f continue sur un intervalle I. $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b)-F(a)$ avec a et b deux éléments de I. On note aussi $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b$.
Propriété : Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b]$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$.

- Si $\forall x\in[a;b], f(x)\geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$.
- Si $\forall x\in[a;b], f(x)\leqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant 0$.

Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$. Si $\forall x\in[a;b], f(x)\leqslant g(x)$, alors $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.
Propriété : Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b]$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$ tels que $a<b$. On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.
De plus, $\forall x\in[a;b], f(x)\leqslant g(x)$. L'aire comprise entre les deux courbes et délimité par les droites d'équation $x=a$ et $x=b$ vaut :
$\int_a^b g(x)-f(x)\mathrm{d}x$
Définition : Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$, avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et $a<b$. La valeur moyenne de la fonction f sur $[a;b]$ est le nombre réel μ tel que $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
Remarque : Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a;b]$, avec $a\in\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$ et $a<b$. Soient m le minimum de f sur $[a;b]$ et M le maximum de f sur $[a;b]$. La valeur moyenne de f sur sur $[a;b]$ est comprise entre m et M : $m\leqslant\mu\leqslant M$.
Propriété (intégration par parties) : Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que u' et v' soient continues sur I. Soient $a\in I$ et $b\in I$.

$$\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$