Chapitre XIII - Fonctions sinus et cosinus

Propriétés : $\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}$:

- $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$
- $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$
- $\sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x)$
- $\cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x)$
- $(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2 = 1$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$
- $\cos(-x) = \cos(x)$
- $\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
- $\cos(\pi + x) = -\cos(x)$
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin(x)$

Propriétés : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}$:

- $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$
- $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
- $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
- $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
- $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$
- $\cos(2a) = \cos(a)^2 - \sin(a)^2 = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

Propriétés : Tableau des valeurs usuelles

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Propriétés : Les fonctions sinus et cosinus sont définies sur $\mathbb{R}$ et 2π-périodiques.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} \sin(x + 2\pi) = \sin(x) \\ \cos\{x + 2\pi) = \cos(x) \end{cases}$$

Les fonctions sinus et cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$.
La fonction sinus est impaire, c'est-à-dire
$\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$
La fonction cosinus est paire, c'est-à-dire
$\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$
Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x) \text{ et } \cos'(x) = -\sin(x)$$

Signe :

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$+$	1	$+$	0
$\cos(x)$	1	$+$	0	$-$	-1

Propriétés :

- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$

Variations :

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0
$\cos(x)$	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	-1

Définitions : Soit $a \in [-1;1]$.

- le nombre $x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = a$ est appelé arcsinus de a. On note $x = \arcsin(a)$.
- le nombre $x \in [0;\pi]$ tel que $\cos(x) = a$ est appelé arccosinus de a. On note $x = \arccos(a)$.

Propriétés : Soit $a \in [-1;1]$

- $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], x = \arcsin(\sin(x))$
- $\forall x \in [0;\pi], x = \arccos(cos(x))$
- $\forall a \in [-1;1], a = \sin(\arcsin(a))$
- $\forall a \in [-1;1], a = \cos(\arccos(a))$

Propriétés :

- Les solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'équation $\sin(x) = a$ sont $\arcsin(a)$ et $\pi - \arcsin(a)$
- Les solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'équation $\cos(x) = a$ sont $\arccos(a)$ et $-\arccos(a)$
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin(x) = a$ sont les nombres de l'ensemble $\{\arcsin(a) + k \times 2\pi, \pi - \arcsin(a) + k \times 2\pi | k \in \mathbb{Z}\}$
- Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $\cos(x) = a$ sont les nombres de l'ensemble $\{\arccos(a) + k \times 2\pi, -\arccos(a) + k \times 2\pi || k \in \mathbb{Z}\}$
- Les solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'inéquation $\sin(x) \leqslant a$ sont les éléments de l'intervalle $[-pi; \arcsin(a)] \cup [\pi - arcsin(a); \pi]$
- Les solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'inéquation $\cos(x) \leqslant a$ sont les éléments de l'intervalle $[-\pi; -\arccos(a)] \cup [\arccos(a); \pi]$
- Les solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'inéquation $\sin(x) \geqslant a$ sont les éléments de l'intervalle $[\arcsin(a); \pi - arcsin(a)]$
- Les solutions sur $[-\pi;\pi]$ de l'inéquation $\cos(x) \geqslant a$ sont les éléments de l'intervalle $[-\arccos(a); \arccos(a)]$