Chapitre XIV - Sommes de variables aléatoires

Définition : Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'univers d'une expérience aléatoire. X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ et Y prend les valeurs y_1, y_2, y_p avec n et p deux entiers naturels non nuls. La variable aléatoire $X+Y$ prend toutes les valeurs possibles $x_i + y_j$ avec $1 \leqslant i \leqslant n$ et $1 \leqslant j \leqslant p$. La probabilité que $X+Y$ soit égale à une valeur k, notée $\mathbb{P}(X+Y=k)$ est la somme des probabilités $\mathbb{P}(\{X=x_i\} \cap \{Y=y_j\})$ avec $x_i + y_j = k$.

Définition : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit X une variable aléatoire définie sur l'univers d'une expérience aléatoire. X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ avec n un entier naturel non nul. La variable aléatoire aX prend toutes les valeurs possibles ax_i avec
$1 \leqslant i \leqslant n$. La probabilité que aX soit égale à une valeur k, notée $\mathbb{P}(aX=k)$ est la probabilité $\mathbb{P}(\{X=x_i\})$ avec $ax_i = k$.

Définition : On effectue successivement deux épreuves aléatoires indépendantes. Soit X la variable aléatoire réelle qui donne le résultat de la première et Y celui de la deuxième. On dit alors que les variables aléatoires réelles X et Y sont indépendantes.

Remarque : Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur l'univers d'une expérience aléatoire. X prend les valeurs $x_1, x_2, ..., x_n$ et Y prend les valeurs y_1, y_2, y_p avec n et p deux entiers naturels non nuls. Alors
$\forall i \in [\![1;n]\!], \forall j \in [\![1;p]\!]$,
$\mathbb{P}(\{X=x_i\} \cap \{Y=y_j\}) = \mathbb{P}(X=x_i) \times \mathbb{P}(Y=y_j)$

Propriété (linéarité de l'espérance) : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles définies sur l'univers d'une expérience aléatoire. $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ et $E(aX) = aE(X)$

Propriété : Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers d'une expérience aléatoire. La variance de la variable aléatoire aX est $V(aX) = a^2V(X)$
L'écart type de la variable aléatoire aX est $\sigma(aX) = |a|\sigma(X)$

Propriété : Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes définies sur l'univers d'une expérience aléatoire. La variance de la variable aléatoire $X+Y$ est $V(X+Y) = V(X) + V(Y)$

Définition : Un échantillon de taille n d'une loi de probabilité est une liste $(X_1, X_2, ..., X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes et identiques qui suivent toutes cette loi.

Définition : Soit $(X_1, X_2, ..., X_n)$ un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X. La somme de cet échantillon est la variable aléatoire
$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
La moyenne de cet échantillon est la variable aléatoire $M_n = \frac{S_n}{n}$

Propriété : Soit S_n la somme d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

- $E(S_n) = nE(X)$
- $V(S_n) = nV(X)$
- $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$

Propriété : Soit M_n la somme d'un échantillon de taille n de la loi de probabilité suivie par une variable aléatoire X.

- $E(M_n) = E(X)$
- $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$
- $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$

Définition : On considère un schéma de Bernoulli de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre p. La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès lors de ces n répétitions suit une loi binomiale de paramètre n et p. On note $Y \rightsquigarrow \mathcal{B}(n,p)$. On peut donc dire que $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ où $\forall i \in [\![1;n]\!], X_i$ suit une loi de Bernoulli de paramètre p.

Propriété : Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètre n et p. $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, $\mathbb{P}(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Propriété : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'univers d'une expérience aléatoire, qui suit une loi binomiale de paramètre $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0;1]$.

- $E(X) = np$
- $V(X) = np(1-p)$
- $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$