Chapitre XV - Concentration - Loi des grands nombres

Propriété (Inégalité de Bienaymé-Tchebichev) : Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance V.
$\forall\delta \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2}$
Remarque : L'inégalité de Bienaymé-Tchebichev indique que la probabilité d'obtenir une valeur distante de μ de plus de δ est inférieure à $\frac{V}{\delta^2}$.
De plus, $\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \delta) = 1 - \mathbb{P}(|X-\mu| < \delta)$
Donc $\mathbb{P}(|X-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2} \iff 1 - \mathbb{P}(|X-\mu| < \delta) \leqslant \frac{V}{\delta^2} \iff 1 - \frac{V}{\delta^2} \leqslant \mathbb{P}(|X-\mu| < \delta)$
Donc l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev permet d'écrire que la probabilité d'obtenir une valeur distante de μ de moins de δ est supérieure ou égale à $1 - \frac{V}{\delta^2}$.
Propriété (Inégalité de concentration) : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère n variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n indépendantes, identiques suivant la même loi de probabilité d'espérance μ et de variance V. On note $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ la variable aléatoire moyenne. Alors :
$\forall\delta \in \mathbb{R}_+^*, \mathbb{P}(|M_n-\mu| \geqslant \delta) \leqslant \frac{V}{n\delta^2}$

Propriété (Loi des grands nombres) : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$. On considère n variables aléatoires X_1, X_2, ..., X_n indépendantes, identiques suivant la même loi de probabilité d'espérance μ et de variance V. On note $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ la variable aléatoire moyenne. Alors :
$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{P}(|M_n-\mu| \geqslant t) = 0$
Remarque : La loi des grands nombres indique que peu importe la valeur de $t > 0$, la probabilité de l'événement $|M_n-\mu| \geqslant t$ se rapproche de 0 lorsque n devient très grand.